FÖ 8,3

Alla dessa derivator

Partiell derivata

$$z = f(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = f'_1 = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{osv.}$$

Kedjeregeln

t. ex. $\quad g(x,y,t) = f(u(x,y), v(x,t))$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = f'_1(u(x,y), v(x,t))\, u'_1(x,y) +$$
$$+ f'_2(u(x,y), v(x,t))\, v'_1(x,t)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = f'_2(u(x,y), v(x,t))\, v'_2(x,t)$$

Riktig derivata ges av linjäriseringen

$$L(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$
$$= f(a,b) + f'_x(a,b)\,h + f'_y(a,b)\,k$$

f är deriverbar i (a,b) om

$$\lim \frac{f(x,y) - L(x,y)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$$

Då gäller:

$$f(x,y) \approx L(x,y) \quad \text{nära } (a,b)$$

Högre ordning: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

På matrisform

$$y = f(x)$$

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \; y \in \mathbb{R}$$

$$h = x - a$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$= f(a) + f'(a)h$$

$$= [\cdot] + [\cdot \cdot \cdot] \begin{bmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Jacobi-matris:

$$f'(a) = Df(a) = [f_1'(a), \ldots, f_2'(a)]$$

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \qquad y = f(x), \; x \in \mathbb{R}^m, \; y \in \mathbb{R}^n$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)h$$

$$= \underset{n \times 1}{\begin{bmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix}} + \underset{n \times m}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}} \underset{m \times 1}{\begin{bmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix}}$$

Kedjeregeln

$$Df(g(x)) = Df(g(x))\, Dg(x)$$

Taylors formel (grad 2)

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} h^T f''(a) h + R$$

Newtons metod

Lös ekv. systemet

$$f(x) = 0$$

där $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Antag att x_0 är en approx lösn. Vi vill hitta en bättre approx $x = x_0 + h$.

Lös den linjäriserade ekv

$$L(x) = 0$$

dvs $f(x_0) + f'(x_0)h = 0$

$$f'(x_0)h = -f(x_0)$$

Detta leder till algoritmen

Välj x och $h = tol+1$

<u>while</u> $|h| > tol$
    beräkna residualen $b = -f(x)$
    beräkna J-matrisen $A = f'(x)$
    lös linj. ekv. $Ah = b$
    uppdatera $x = x+h$
<u>end</u>

Lokala max-, min-, sadelpunkter

1. kritisk punkt ges av

$$f'(x)^T = 0$$

dvs
$$\begin{cases} f_1'(x) = 0 \\ f_2'(x) = 0 \\ \vdots \\ f_m'(x) = 0 \end{cases}$$

2. ~~...~~ undersök Hesse-matrisen

pos. def.	lok min
neg. def.	lok max
indefinit	sadel
annars	ingen info

Max/min problem

1. Inre singulära punkter $f'(x)$ existerar ej
   Inre kritiska punkter $f'(x)=0$
2. Randpunkter

Geometriska derivator

grad, div, rot

$\nabla\phi$, $\nabla\cdot\mathbb{F}$, $\nabla\times\mathbb{F}$

Riktnings derivata:

$u = u_1 i + u_2 j$
$|u| = 1$

$$D_u f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+t\,u_1,\ b+t\,u_2)\Big|_{t=0}$$

$$D_u f(a,b) = u \cdot \nabla f(a,b)$$

∇f är normalvektor till nivåkurva och nivåyta.

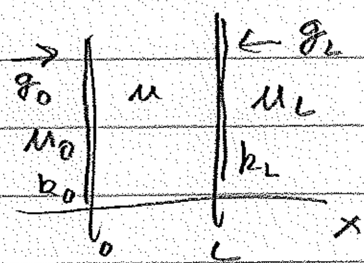
Produktderivator

t.ex. $\nabla\cdot(\phi \mathbb{F}) =$

och $\nabla\times\nabla\phi = 0$

$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{F}) = 0$

Randvärdesproblem



$$1\text{-D}\quad \begin{cases} -D(aDu) = f & \text{in } (0,L) \\ a D_N u + k(u - u_A) = g & x = 0, L \end{cases}$$

$$D_N u = \begin{cases} Du & x = L \\ -Du & x = 0 \end{cases} \qquad k = \begin{cases} k_L \\ k_0 \end{cases} \text{ osv.}$$

$j = -aDu$

Veta betydelsen

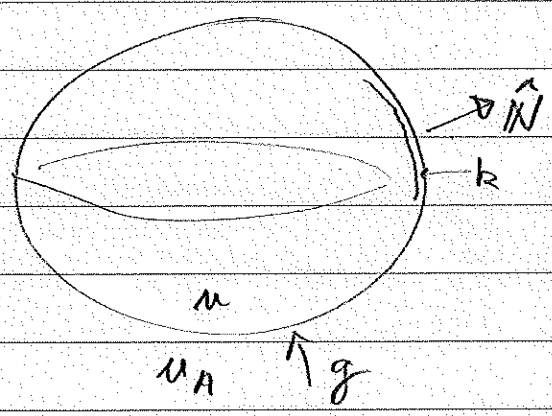
Lösa med två integrationer

Svag form, FEM

3-D

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f & \text{i } D \\ u = u_A & \text{på } S_1 \\ a D_{\hat{N}} u + k(u-u_A) = g & \text{på } S_2 \end{cases}$$

$\mathbb{F} = -a\nabla u$



Härleda detta.

<u>Randvillkoret</u>

utflöde genom S:

$$\begin{cases} \hat{N}\cdot\mathbb{F} = k(u-u_A) - g \\ \hat{N}\cdot\mathbb{F} = \hat{N}\cdot(-a\nabla u) = -a\,\hat{N}\cdot\nabla u = \\ \quad = -a D_{\hat{N}} u. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad -a D_{\hat{N}} u = k(u-u_A) - g$$

$k=\infty$: $\quad \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0} a D_{\hat{N}} + u - u_A = \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0} g$ på S_1

$$u - u_A = 0 \text{ på } S_1$$