Kunskapslista MVE255 - Matematisk analys i flera variabler

Del I

- Gränsvärden i flera variabler
- Göra/förstå parametrisering av kurva
- Räkna ut tangenten (hastigheten) / farten / längden för/av en kurva.
- Derivera partiellt
- Skissa nivåkurvor
- Räkna ut tangentlinje till en kurva
- Räkna ut tangentplan till en yta
- Kedjeregeln i flera variabler
- Räkna ut gradienten av en funktion.
- Räkna ut Jacobi-matrisen
- Räkna ut Hessianen
- Räkna ut riktningsderivata.
- Linjärisering + Taylors formel i två variabler.

- Hitta kritiska punkter
- Bestämma kritiska punkters typ
- Bestämma max och min för funktion med bivillkor
- Använda Lagranges multiplikatormetod för att hitta max och min.

Del II

- Multipelintegraler
- Kurvintegraler
- Ytintegraler
- Div, grad, curl
- Partiell integration i flera variabler
- Divergenssatsen (Gauss sats)
- Skriva om differentialekvation på svag form i 1-D och 2-D (FEM)
- Allmänt om värmeledningsekvationen

Del III (Matlab)

- Matlab-labbarna

Del I - ett urval

METOD: Bestäm gränsvärde

1. Finns det någon "väg" som går mot ∞ eller $-\infty$?
   om $\Rightarrow$ gränsvärde existerar ej
2. Går det att hitta två "vägar" som ger olika gränsvärde?
   om $\Rightarrow$ gränsvärde existerar ej
3. Visa att det finns om 1. eller 2. inte funkade (svårare).

METOD: Bestäm tangentlinjen till nivåkurvan $f(x,y)=C$ i punkten (a,b).

1. Beräkna $\nabla f(a,b) = (p,q)$
2. Tangentlinjen blir
   $$p(x-a) + q(y-b) = 0$$

METOD: Bestäm tangentplan till funktionsytan $z=f(x,y)$ i en punkt (a,b)

1. Låt $g(x,y,z) = z - f(x,y)$
2. Beräkna z-koordinaten c, dvs:
   $$(a,b,c) = (a,b,f(a,b))$$
3. Beräkna $\nabla g(a,b,c) = (p,q,r)$
4. Planets ekvation blir
   $$p(x-a) + q(y-b) + r(z-c) = 0$$

(Ibland har man $g(x,y,z)$ och (a,b,c) givna direkt, då kan man hoppa över 1 och 2)

Jacobi-matrisen

För en vektorvärd funktion $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ av variablerna $x = (x_1, \ldots, x_m)$ är Jacobi-matrisen Df:

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{alla partiella derivator av } f_1 \\ \vdots \\ \leftarrow \text{alla partiella derivator av } f_n \end{array}$$

Hessianen

För en reellvärd funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ av n stycken variabler är Hessianen H alla andra ordningens derivator enligt:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{alla partiella derivator av } \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{alla partiella derivator av } \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array}$$

Riktningsderivata

För en reellvärd funktion $f(x,y)$ är riktningsderivatan i punkten (a,b) i riktningen $u = (u_1, u_2)$:

$$D_u f(a,b) = \frac{u}{|u|} \cdot \nabla f(a,b)$$

$\uparrow$

VIKTIGT: u måste normaliseras till längden 1

Linjarisering i punkten (a,b)

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$$

Taylorutveckling i punkten (a,b)

$$f(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$$
$$+ \frac{f_{11}(a,b)}{2!}(x-a)^2 + f_{12}(a,b)(x-a)(y-a) + \frac{f_{22}(a,b)}{2!}(y-b)^2$$
$$+ \ldots$$

METOD: Hitta kritiska punkter

Bestäm alla punkter som uppfyller

$$Df(x,y) = 0$$

METOD: Bestäm kritiska punkters typ

1. Beräkna hessianen H av f.
2. Sätt in den kritiska punkten i H och beräkna matrisens egenvärden. $(\det(H(a,b) - \lambda I) = 0)$
3. Beroende på egenvärdenas tecken ges typen:
   - alla $\lambda > 0$ ger min
   - alla $\lambda < 0$ ger max
   - något $\lambda < 0$ och något $\lambda > 0$ ger sadelpunkt
   - annars ges ingen information

METOD: max och min för funktion med bivillkor

1. Hitta alla punkter som uppfyller $\nabla f = 0$.
   Om de ligger i området, räkna ut f:s värde i punkten.

2. Bestäm parametriseringen för varje rand och sätt in i f, dvs $f = f(\mathbb{r}(t))$.
   Hitta punkterna som uppfyller $f'(\mathbb{r}(t)) = 0$
   och räkna ut f:s värde.

3. Räkna ut f:s värde i hörnen.

4. Jämför alla uträknade värden och ta ut max och min.

METOD: max och min med Lagranges multiplikatormetod

- Givet: $f(x,y)$ med bivillkor $g(x,y) = 0$.

1. Skriv upp Lagrangefunktionen
$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

2. Hitta lösningarna till
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

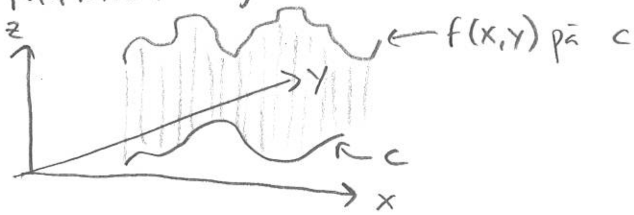
3. Beräkna f:s värden för de lösningspunkter du hittade i 2) och ta ut max och min.

Kurv- och ytintegraler

Kurvintegraler

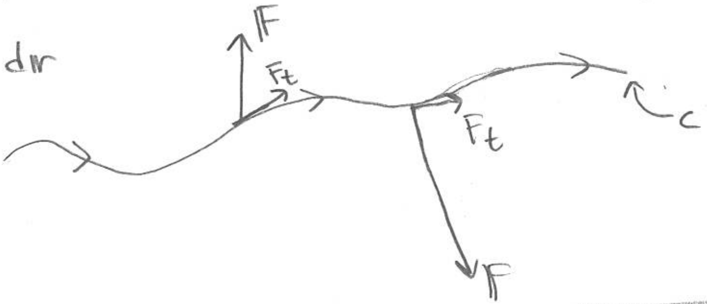
A| Integral av en reellvärd funktion längs en kurva.

ex: $\int_C f(x,y)\,ds$



B| Integral av ett vektorfälts tangent längs en kurva

ex: $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$

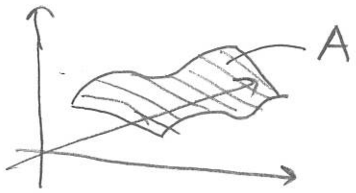


För att lösa A och B parametriserar man kurvan C, dvs $\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ med <u>en</u> parameter (t)

Ytintegraler

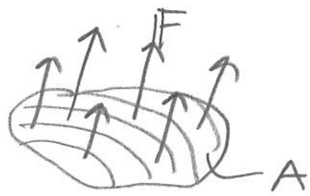
C| Integral av en reellvärd funktion över en yta

ex: $\iint_A f(x,y,z)\,dS$



D| Integral av ett vektorfält genom en yta

ex: $\iint_A \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\,dS$



För att lösa C och D parametriserar man ytan A, dvs $\mathbb{r} = \mathbb{r}(s,t)$ med <u>två</u> parametrar (s,t).

Formler ⟶

Formel A: $\int_C f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$

Formel B: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \, dt$

Formel C: $\iint_A f \, dS = \iint f(\mathbf{r}(s,t)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| ds\, dt$

↑ s och t gränser

Formel D: $\iint_A \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \pm \iint \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) ds\, dt$

↑ beroende på flödets riktning genom ytan

Grad, div och curl/rot

∇ är en vektor

↑ nabla/del

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ i 2-d}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ i 3-d}$$

osv...

Genom att hantera ∇ som en vektor definieras

- <u>Gradienten</u> (av en reellvärd funktion)

$$\text{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- <u>Divergensen</u> (av en vektorvärd funktion)

$$\text{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3 \quad (\text{om } \mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3))$$

- <u>Rotationen</u> (av en vektorvärd funktion)

$$\text{rot} \mathbf{F} = \text{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (\text{om } \mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3))$$

FORMEL: Partiell integration i flera variabler

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbb{F} \phi \, dV = \iint_A \hat{\mathbb{N}} \cdot \mathbb{F} \phi \, dS - \iiint_D \mathbb{F} \cdot \nabla \phi \, dV$$

D- integrationsområdet

A- randen

$\mathbb{F}$ - en vektorvärd funktion

ϕ - en reellvärd funktion

Divergenssatsen (Gauss sats)

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbb{F} \, dV = \iint_A \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} \, dS$$

Används för att göra en integral enklare att räkna ut. Ibland är högersidan enklare och ibland vänster.

Tolkning:

Om man ska räkna ut flödet av ett vektorfält ($\mathbb{F}$) genom en yta (A) (dvs högersidan) så är det samma som att räkna ut $\nabla \cdot \mathbb{F}$ över volymen A innesluter (dvs vänstersidan).

METOD: skriva om D.E. på svag form.

1. Multiplicera båda sidorna med en funktion v som uppfyller $v = 0$ där u har randvillkor u = en konstant.

2. Integrera båda sidorna över området
 ($\int_a^b \ldots dx$ i 1-d , $\iint_{\ldots} \ldots dxdy$ i 2-d osv)

3. Använd:
 - partiell integration (P.I.)
 - samt randvillkor för u och v för att förenkla så mycket som möjligt

 Mål: högsta ordningens derivata ska vara så liten som möjligt
 (tex om man använder P.I. för många gånger blir derivatans ordning på v för hög)

4. Sätt samman allt och skriv alla termer som innehåller u i V.L:et och resten i H.L:et och skriv den svaga formuleringen:

$$
\begin{cases}
\text{Hitta } u \text{ med } \underbrace{u(?) = ? \text{ och } \ldots}_{\text{u:s Dirichlet-randvillkor ska stå här}} \\
\text{så att} \\
\overbrace{\iint \ldots}^{VL} = \overbrace{\iint \ldots}^{HL} \\
\text{för alla } v \text{ med } \underbrace{v(?) = 0 \text{ och } \ldots}_{\text{de randvillkor du har för v ska stå här}}
\end{cases}
$$

METOD: Kurv-, yt- och volymintegraler

1. Identifiera integrationsområdets typ:
   kurva, yta eller volym?

2. Skissa området så gott det går.

3. Välj lämplig parametrisering med gränser

   kurva ⇒ 1 parameter: $\mathbb{r}(t)$

   yta ⇒ 2 parametrar $\mathbb{r}(s,t)$

   volym ⇒ 3 parametrar $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \\ z = \dots \end{cases}$

4. Välj formel:

   kurva ⇒ A eller B

   yta ⇒ C eller D

   volym ⇒ $\iiint dx\,dy\,dz$, $\iiint r\,dr\,d\theta\,dz$, $\iiint R^2 \sin\phi \, d\phi\, d\theta\, dR$

5. Räkna ut.

Tips:

2. Skissa området:

- använd 2-d (xy-planet, xz-planet, yz-planet)
- är det flera olika objekt som skär, förstå varje enskilt först
- titta på varje olikhet för sig, och se vilket område som är gemensamt

⟶

3. Välj lämplig parametrisering

(Ofta polära/cylindriska eller sfäriska)

- Hur ser området ut?

  Om inte sfäriska är självklart börja med cylindriska

- Sträva efter att få rätt antal parametrar

  Om man har fler parametrar än det ska vara så sätt in i ekvationerna och lös ut samband.

- När rätt antal parametrar $\Rightarrow$ hitta gränser

  Titta från vad till vad området går.

  Stoppa in parametriseringen i ekvationen för att få fram gränser.