MVE255

F10 17/4-18 (1.)

Översikt kursen del I

Gränsvärden

Funktioner

$f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$m > 1$: funktion av flera variabler

$n > 1$: vektorvärd funktion

Kurvor $\mathbf{r}(t)$

Hastighet $\dot{\mathbf{r}}$

Fart $|\dot{\mathbf{r}}|$

Acceleration $\ddot{\mathbf{r}}$

Längd $\int |\dot{\mathbf{r}}|\, dt$

Extremvärden

Hitta $f' = 0$

Kritiska punkters typ:

- max
- min
- sadel

Grafer

Skissa 2d/3d-funktioner

Nivåkurvor / nivåytor

DERIVERING

∂ partiell derivata

∇ gradienten

D Jacobimatrisen

$D_u f$ riktningsderivata

H Hessematrisen

Kedjeregeln

Tillämpning: hitta $\frac{\max}{\min}$

- Obegränsat område
- Begränsat område
- Lagranges multiplikatormetod ($g(x) = 0$)

Tangentlinje

Tangentplan

Numeriska tillämpningar

- Linjarisering
- Taylors formel/polynom
- Newtons metod

INTEGRERING

FEM i 1-d

FEM i 2-d

Differentialekvationer (DE)

DE: ekvation som relaterar en funktion med dess derivator

DE beskriver verkligheten.

Exempel på DE:

- $F = ma$ Newtons andra lag $(a = \ddot{r})$

  Beskriver hur en kraft påverkar en kropps rörelse.

- $\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nu \nabla^2 u = -\nabla w + g$ Navier-Stokes ekvationer

  Beskriver hur en fluid rör sig.

- $\frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2}\right) = q$ Bernoullis balkekvation

  Beskriver hur en balk böjs.

Andra kända: Maxwells ekvationer, Einsteins fältekvationer, Schrödingerekvationen, vågekvationen, o.s.v.

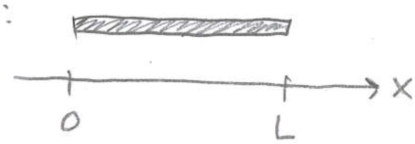
Vi ska studera en annan känd DE närmare:

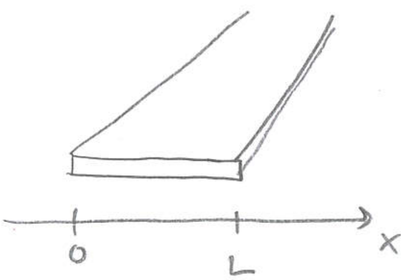
Värmeledningsekvationen i 1-d

Ekvationen: $\boxed{D(-a(x)\, Du(x)) = f(x) \quad x \in I = (0,L)}$

Beskriver värmeledningen i en stång/platta.

Tänk er en

stång: 

eller platta 

→

I ekvationen har vi:

- $D = \frac{d}{dx}$ derivata enhet: $\left[\frac{1}{m}\right]$
- $f(x)$ – värmekälltäthet $\left[\frac{J}{m^3 s}\right]$ (värmekälla)
- $u(x)$ – temperaturen $[K]$ (det vi vill lösa fram)
- $a(x)$ – värmeledningskoefficient $\left[\frac{J}{mKs}\right]$ (hur lätt leds värme?)

(Notera vi studerar fallet utan tidsberoende. Lösningen kommer bli jämviktsläget som uppstår efter "oändligt" lång tid gått.)

Fouriers lag

(värmeflödet)

Värmeflödestätheten i x-riktningen betecknar vi $j(x)$ och ges av Fouriers lag:

$$\boxed{j(x) = -a(x)\,Du(x)} \qquad \left[\frac{J}{m^2 s}\right]$$

Fouriers lag säger:

- värmeflödet ($j(x)$) är proportionellt mot temperaturförändringen ($u'(x)$)
- värme går från varmare till kallare (minustecknet)
- värmeflödet beror på värmeledningsförmågan ($a(x)$)

Detta kan du se genom att tolka det matematiska sambandet, gör det...

Värmeledningsekvationen säger att förändringen av värmeflödet är lika med värmekällan.

För att lösa en DE behövs randvillkor...

Randvillkor för värmeledningsekvationen

Vi sätter upp ett villkor för varje rand, $x=0$ och $x=L$.

- **Vid $x=L$**

Vi sätter upp följande samband för värmeflödestätheten utåt

$$\boxed{j(L) = k_L\,(u(L) - u_L)}$$

där

- $u(L)$ är temperaturen i stången precis vid $x=L$ $[K]$
- u_L är omgivningens temperatur utanför stången vid $x=L$. $[K]$
- k_L är ändpunktens värmeöverföringskoefficient $\left[\frac{J}{m^2Ks}\right]$

Vad säger detta samband som vi satt upp?

- Om vi har en skillnad mellan randens temperatur och omgivningens temperatur får vi ett värmeflöde över randen.
- Flödet går från varmare till kallare.
- Flödets blir större om skillnaden är större eller överföringskoefficienten är större.

Vi har från Fouriers lag att $j(L) = -a(L)Du(L)$, sätter vi detta lika med vårt samband får vi:

$$\boxed{-a(L)Du(L) = k_L\,(u(L) - u_L)}$$

- **Vid $x=0$**

Vi sätter upp liknande samband för värmeflödet utåt

$$-j(0) = k_0\,(u(0) - u_0)$$

$\uparrow$
minustecken för vi vill ha flödet utåt dvs åt vänster

$\longrightarrow$

Använder vi Fouriers lag på liknande sätt som vid $x=L$ får vi till slut:

$$\boxed{a(0)\,Du(0) = k_0(u(0)-u_0)}$$

Vi sätter samman allt och får:

Randvärdesproblem för värmeledning:

$$D(-a\,Du)=f \qquad x\in I=(0,L)$$

$$a\,D_N u + k(u-u_A)=g \qquad x=0,L$$

Där vi använder beteckningen för riktningsderivatan:

$$\begin{cases} D_N = \hat{\mathbb{N}}\cdot\nabla \\ D_N u = \hat{\mathbb{N}}\cdot Du \end{cases}$$

(u_A är omgivningens temperatur)

där $\hat{\mathbb{N}}$ är randens normal, i 1-d får vi

$$\begin{cases} D_N u = -u' & \text{vid } x=0 \\ D_N u = u' & \text{vid } x=L \end{cases}$$

Vi har också lagt till g i randvillkoret, g är värmekälla på randen, d.v.s föreskrivet inflöde av värme på randen. Fundera hur det hänger ihop med de samband vi satte upp för randvillkoren.

Två specialfall för randvillkoren

- $k=0$ perfekt isolering

  ger $\boxed{a D_N u = g}$ eller om $g=0$, $\boxed{a D_N u = 0}$

- $k=\infty$ ingen isolering alls

  Dela med k: $\dfrac{a D_N u}{k} + u - u_A = \dfrac{g}{k}$ och låt $k\longrightarrow\infty$

  $\Longrightarrow \quad u-u_A=0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{u=u_A}$

Ex]
$$\begin{cases} D(-5Du) = 0 & I=(0,1) \\ -5Du(0) + 3(u(0)-2) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Lös: Integrering ger: $-5Du = C_1 \Rightarrow Du = \frac{-C_1}{5}$

igen: $u = \frac{-C_1}{5}x + C_2$

Använd randvillkor för att lösa fram C_1 och C_2:

$u(1)=0 \Rightarrow u(1) = \frac{-C_1}{5} + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 5C_2$

$-5Du(0) + 3(u(0)-2) = 0$; $-5Du = C_1$ ger

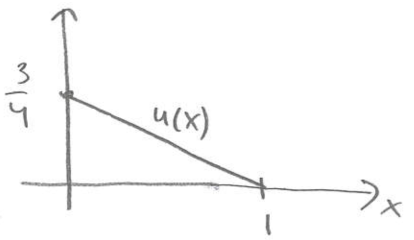
$C_1 = 6 - 3u(0)$ där $u(0) = \frac{-C_1}{5}\cdot 0 + C_2 = C_2$

$\Rightarrow C_1 = 6 - 3C_2 \Rightarrow 5C_2 = 6 - 3C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow C_1 = \frac{15}{4}$

Vi får till slut:

$$\boxed{u(x) = \frac{3}{4}(1-x)}$$



Notera: $u(0) = \frac{3}{4}$ men u_A vid $x=0$ är 2.

$j(x) = -a(x)\,Du(x) = \frac{15}{4} > 0$, dvs värmen flödar åt höger

Ex) Lös $D(-Du) = f(x)$ $(0,1)$

$$-Du(0) = 0$$
$$u(1) = 0$$

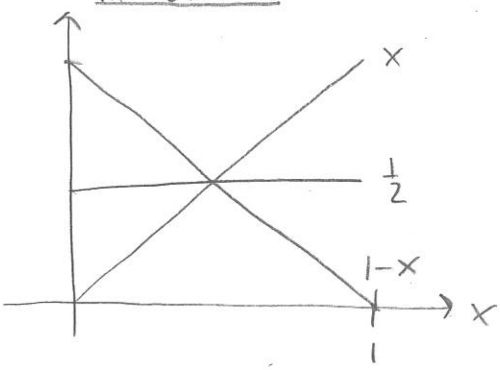
för

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = 1-x$

Värmekälla:



a)

$$-u'' = x$$
$$u' = \frac{-x^2}{2} + C_1$$
$$u = \frac{-x^3}{6} + C_1x + C_2$$

$-Du(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$u(1) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{6}$

$$u(x) = \frac{1}{6}(1-x^3)$$

b)

$$-u'' = \frac{1}{2}$$
$$u' = \frac{-x}{2} + C_1$$
$$u = -\frac{x^2}{4} + C_1x + C_2$$

$C_1 = 0$

$C_2 = \frac{1}{4}$

$$u(x) = \frac{1}{4}(1-x^2)$$

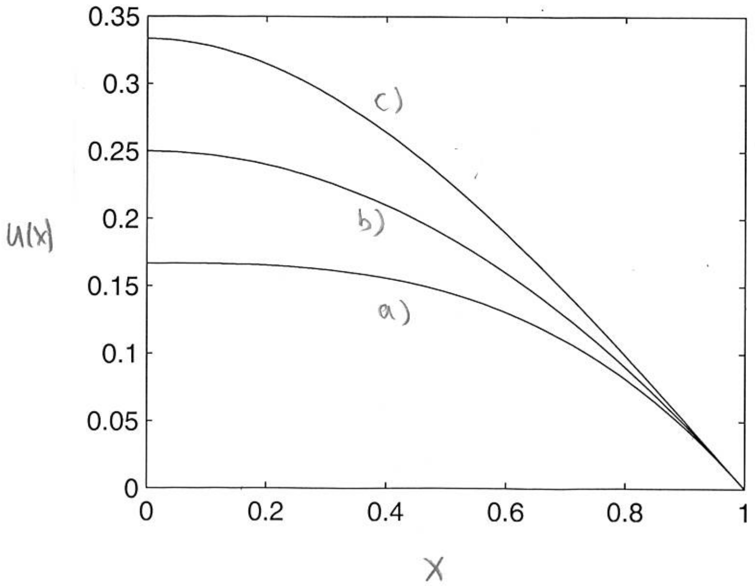
c)

$$-u'' = 1-x$$
$$u' = \frac{x^2}{2} - x + C_1$$
$$u = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

$C_1 = 0$

$C_2 = \frac{1}{3}$

$$u(x) = \frac{1}{6}(2 + x^3 - 3x^2)$$



Var ska elementet stå i ett rum med ett öppet fönster?

I exemplen ovan kunde vi lösa DE:erna <u>analytiskt.</u>

Oftast är dock ekvationens innehåll (a, f i vårt exempel) mer komplicerade och då går det ej att lösa problemet analytiskt.

Istället behövs det en metod som löser problemet <u>numeriskt.</u>

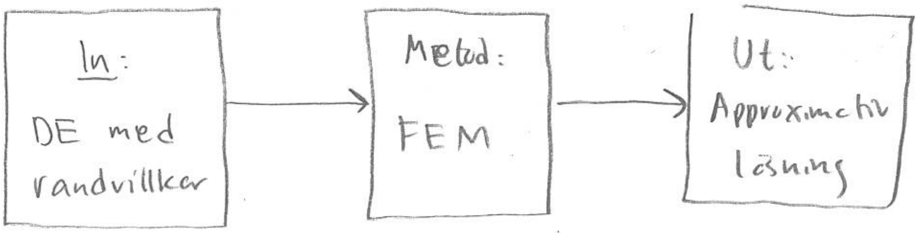
Vi ska studera en av de vanligaste och kraftfullaste metoderna:

Finita elementmetoden – FEM

FEM: numerisk metod för att lösa DE

(numeriskt/approximativt vs. analytiskt/exakt)

Överblick:



Vissa numeriska metoder, såsom Newtons metod och fixpunktsiteration, bygger på "fiffiga geometriska knep". FEM däremot bygger på avancerad matematisk teori, mer specifikt något kallat svag formulering.

FEM: de olika stegen