F11 19/4-18

Svag formulering

Viktigt verktyg för att skriva om DE:en + randvillkor på svag form är partiell integration (P.I):

Formel i l-d: $\boxed{\int_a^b fg\,dx = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'\,dx}$

Typer av randvillkor:

$$\begin{cases} u = c & \text{Dirichlet} \\ u' = c & \text{Neumann} \\ au + bu' = c & \text{Robin} \end{cases}$$

Svag formulering: Vi tar en DE med randvillkor och skriver om på en annan form genom att multiplicera med en funktion och integrera.

Den nya "formen" kallas svag form.

METOD: svag formulering

Givet: DE med randvillkor

1.) Multiplicera båda sidor av DE:en med en funktion $v(x)$ (kallad testfunktion) och integrera över intervallet.

(Där vi har Dirichletvillkor låter vi $v = 0$)

Ex)
$$\begin{cases} -D(aDu) = f & I = (0, L) \\ u'(0) = c_1 & (\text{Neumann}) \\ u(L) = c_2 & (\text{Dirichlet}) \end{cases}$$

1.) $-D(aDu)v = fv$

$$-\int_0^L D(aDu)v\,dx = \int_0^L fv\,dx$$

$$u(L) = c_2 \implies v(L) = 0$$

2.) Använd P.I. (en eller flera gånger) för att få ett uttryck med så låg högsta ordningens derivata som möjligt.

(Sätt in randvillkor och eventuella villkor för v där det går.)

2.) VL:

$$-\int_0^L (au')'v\,dx = [P.I.] =$$

$$= -[au'v]_0^L + \int_0^L au'v'\,dx$$

$$= -a(L)u'(L)\underbrace{v(L)}_{=0} + a(0)\underbrace{u'(0)v(0)}_{=C_1} + \int_0^L au'v'\,dx$$

$$= a(0)C_1v(0) + \int_0^L au'v'\,dx$$

HL: redan klart (inga derivator)

3.) Sätt allt som innehåller u (den sökta funktionen) i V.L. och resten i H.L. och skriv den svaga formuleringen enligt:

$\boxed{\text{Hitta } u=u(x) \text{ med } \underbrace{\_\_\_\_\_\_}_{\text{alla Dirichletvillkor för } u} \text{ så att } VL = HL \text{ för alla } v=v(x) \text{ med } \underbrace{\_\_\_\_\_\_}_{\text{alla villkor för } v}}$

Svaga formen

3.)

$$VL = \int_0^L au'v'\,dx$$

$$HL = \int_0^L fv\,dx - a(0)C_1v(0)$$

$\boxed{\text{Hitta } u=u(x) \text{ med } u(L)=C_2 \text{ så att } \int_0^L au'v'\,dx = \int_0^L fv\,dx - a(0)C_1v(0) \text{ för alla } v=v(x) \text{ med } v(L)=0}$

Svaga formen

EX
$$\begin{cases} -D(5Du) = x & i\ (0,1) \\ -5Du(0) + 3(u(0)-2) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

1.) $-\int_0^1 (5u')'v\,dx = \int_0^1 vx\,dx$

$u(1)=0 \Rightarrow v(1)=0$

2.) HL: klart.

VL: $-\int_0^1 (5u')'v\,dx = -[5u'v]_0^1 + \int_0^1 5u'v'\,dx$

$$= -5u'(1)\underbrace{v(1)}_{=0} + 5u'(0)v(0) + \int_0^1 5u'v'\,dx$$

$\rightarrow 5u'(0) = 3u(0) - 6$ enligt randvillkoret

$$VL = (3u(0)-6)v(0) + \int_0^1 5u'v'\,dx$$

3.) $\boxed{\text{Hitta } u=u(x) \text{ med } u(1)=0 \text{ så att } \int_0^1 5u'v'\,dx + 3u(0)v(0) = \int_0^1 xv\,dx + 6v(0) \text{ för alla } v=v(x) \text{ med } v(1)=0}$

Ex) Värmeledningsekvationen

Hitta $u=u(x)$ så att

$$-D(aDu)=f \qquad x\in I=(0,L)$$

$$aD_N u + k(u-u_A)=g \qquad x=0,L$$

Starka formen

(Notera: det är u vi söker)

$$\begin{cases} -a(0)u'(0)+k_0(u(0)-u_0)=g_0 \\ a(L)u'(L)+k_L(u(L)-u_L)=g_L \end{cases}$$

Kom ihåg: $D_N u = \hat{N}\cdot\nabla u$
↑ randens normal

Skriv på svag form:

1.) $$-\int_0^L (au')'v\,dx=\int_0^L fv\,dx$$

2.) HL: klart

VL: $$-\int_0^L (au')'v\,dx = -\left[au'v\right]_0^L+\int_0^L au'v'\,dx=$$

$$=-a(L)u'(L)v(L)+a(0)u'(0)v(0)+\int_0^L au'v'\,dx=$$

$$=\left(k_L(u(L)-u_L)-g_L\right)v(L)+\left(k_0(u(0)-u_0)-g_0\right)v(0)+\int_0^L au'v'\,dx$$

3.) Hitta $u=u(x)$ så att

$$\int_0^L au'v'\,dx + k_0u_0v(0)+k_Lu(L)v(L)=$$

$$=\int_0^L fv\,dx+(g_0+k_0u_0)v(0)+(g_L+k_Lu_L)v(L)$$

för alla $v=v(x)$.

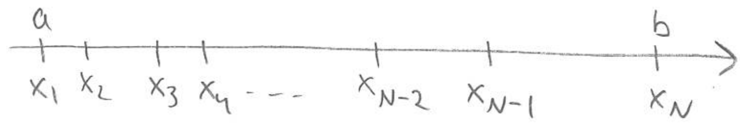
Svaga formen

Nu har vi studerat svag formulering. Innan vi går in på FEM-formuleringen ska vi titta på:

Styckvis linjära funktioner

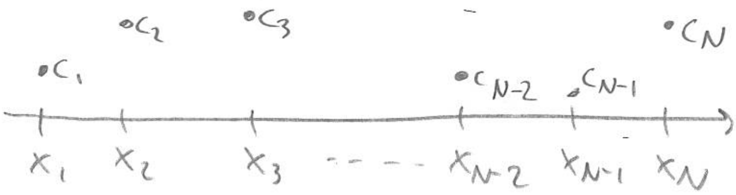
Utgå från ett intervall $[a,b]$ som vi delar upp i $N-1$ stycken delintervall:

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

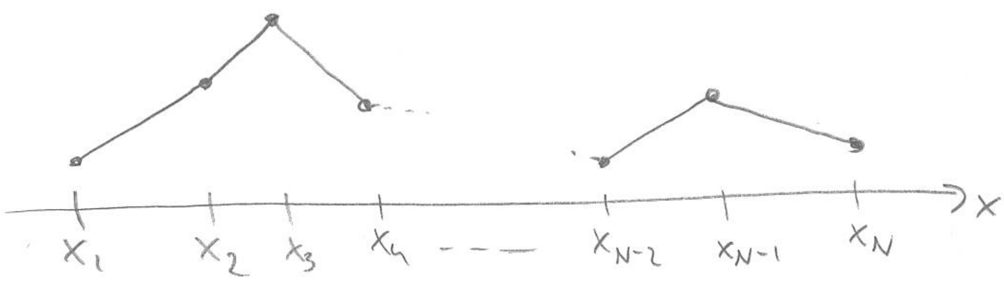


Vi definierar en funktion f genom att först ge funktionen ett värde i varje punkt x_i enligt:

$$f(x_i) = c_i$$



och sedan dra raka linjer mellan dessa värden för att definiera funktionen över hela $[a,b]$:



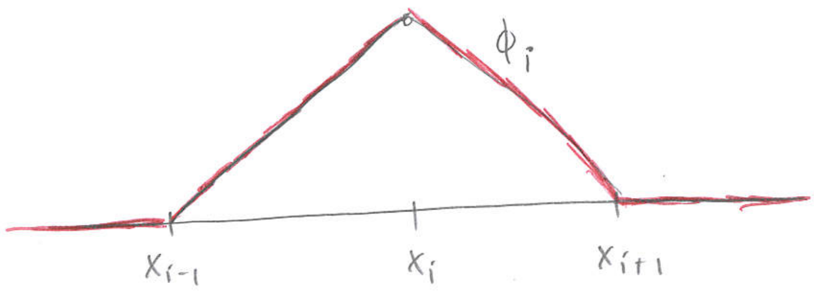
Sådana funktioner kallas <u>styckvis linjära</u>.

Genom att låta N vara stort kan vi approximera mer avancerade funktioner.

Hur kan vi skriva en styckvis linjär funktion på ett bra matematiskt sätt?

$\longrightarrow$

Vi definierar först en så kallad hattfunktion ϕ_i:



ϕ_i uppfyller:

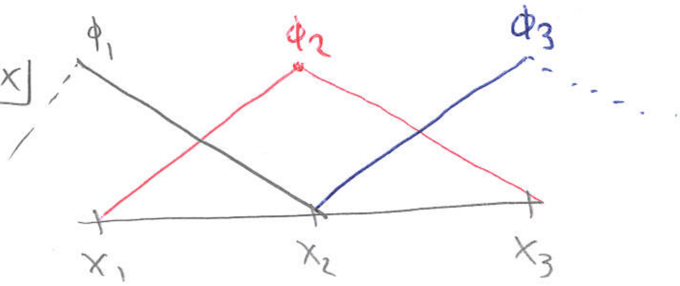
- $\phi_i(x_i) = 1$
- $\phi_i(x) = 0$ för x utanför (x_{i-1}, x_{i+1})
- ϕ_i styckvis linjär enligt bilden

Vi inför nu en hattfunktion ϕ_i per punkt x_i. Ett styckvist linjärt f kan nu skrivas

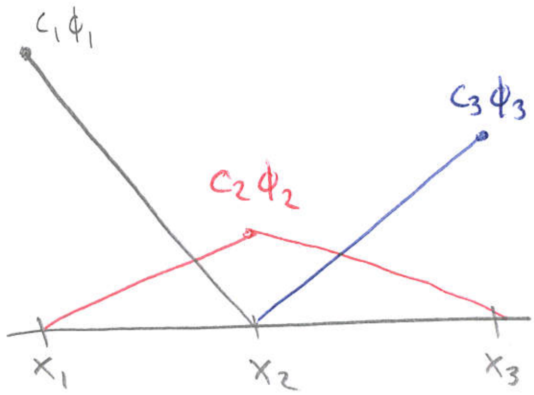
$$\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i(x)}$$

Låt V vara rummet av alla styckvis linjära funktioner på $[a,b]$. $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ är då en bas för V. Varje $f \in V$ är en linjärkombination av denna bas.

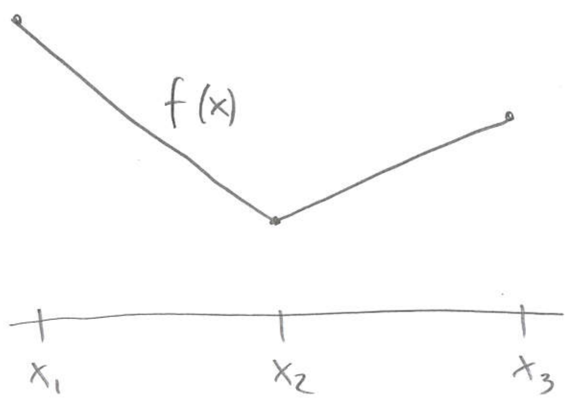
Ex



ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3



$c_1\phi_1, c_2\phi_2, c_3\phi_3$



$f(x) = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3$

FEM-formuleringen

Givet: den svaga formen

Mål : bestämma $u = u(x)$ på I

Den sökta funktionen $u = u(x)$ kan vara en komplicerad funktion men vi gör här en förenkling:

vi nöjer oss med att hitta ett approximativt

$U \approx u$ som är på formen

$$\boxed{U = \sum_{i=1}^{N} U_i \phi_i}$$

dvs en styckvis linjär funktion. (vi har delat upp I i $N-1$ intervall). Det är nu U_i $i = 1, \dots, N$ vi ska lösa fram.

Vad gör vi med v?

Låt $\boxed{v = \phi_j \quad j = 1, \dots, N}$

Nu sätter vi in $u \approx U$ och $v = \phi_j$ i den svaga formen:

$$\int_0^L a\, Du\, Dv\, dx = \int_0^L f v\, dx$$ ← vi tar denna som exempel ($k = g = 0$ för enkelhets skull)

Vi får:

$$\int_0^L a\, D\left(\sum_{i=1}^{N} U_i \phi_i\right) D\phi_j\, dx = \int_0^L f \phi_j\, dx \qquad j = 1, \dots, N$$

och ändrar om:

$$\sum_{i=1}^{N} U_i \int_0^L a\, \phi_i' \phi_j'\, dx = \int_0^L f \phi_j\, dx \qquad j = 1, \dots, N$$

→

Vi inför följande beteckningar

$$\boxed{\begin{aligned} &\bullet\ a_{ji} = \int_0^L a\,\phi_i'\,\phi_j'\,dx \\ &\bullet\ b_j = \int_0^L f\,\phi_j\,dx \end{aligned}}$$

Vilket ger oss

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ji} U_i = b_j \qquad j = 1, \ldots, N$$

d.v.s:

$$\begin{cases} a_{11} U_1 + a_{12} U_2 + \ldots + a_{1N} U_N = b_1 \\ \vdots \\ a_{21} U_1 + a_{22} U_2 + \ldots + a_{NN} U_N = b_N \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

Alltså $\boxed{AU = b}$

med
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

A kallas styvhetsmatris

b kallas lastvektor

Extra

Den svaga formuleringen säger att vi ska hitta en funktion $u = u(x)$ som uppfyller integralekvationen

$$\int_0^L a(x)u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^L f(x)v(x)\,dx \qquad (*)$$

för alla funktioner $v = v(x)$.

Här är $a(x), f(x)$ och L givna och $u(x)$ är okänd, $u(x)$ ska uppfylla $(*)$ för alla $v(x)$ som sätts in.

Här är "alla" lite diffust och därför brukar en införa ett funktionsrum, kalla det V.

Exempelvis:

$$V = \{\text{alla "relativt normala" funktioner på } I\}$$

Svaga formen blir: hitta $u \in V$ så att $(*)$ gäller $\forall v \in V$.

Förenklingen görs här genom att titta på ett begränsat funktionsrum, kalla det V_H.

Exempelvis: $V_H = \{\text{alla styckvis linjära funktioner på } I\}$

Eftersom V_H är ändligtdimensionellt går det att skriva $f \in V_H$ som en linjärkombination av basfunktioner ϕ_i enligt:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i\,\phi_i(x)$$

Den approximativa svaga formen (FEM-formuleringen) blir då:

Hitta $U(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i\,\phi_i(x)$ så att

$$\int_0^L aU'v'\,dx = \int_0^L fv\,dx$$

för alla $v = \sum_{i=1}^{N} c_i\,\phi_i(x)$.

$\longrightarrow$

Det är fortfarande väldigt många v som måste undersökas, det räcker dock att titta på $v = \phi_j$ $j = 1, \dots, N$.

Dvs: Hitta $U = \sum_{i=1}^{N} U_i \phi_i$ så att

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^L a U' \phi_j' \, dx = \int_0^L f \phi_j \, dx \\ \text{för } j = 1, \dots, N. \end{array}\right\} \quad (**)$$

Varför räcker detta?

Jo, antag att $(**)$ är uppfylld. Tag då vilket v som helst i V_H. Ett sådant v kan skrivas

$$v = \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i$$

Vi sätter in v i den svaga formen för att se om den uppfyller den:

$$\underline{\int_0^L a U' v' \, dx} = \int_0^L a U' \left(\sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i \right)' dx = \sum_{i=1}^{N} c_i \int_0^L a U' \phi_i' \, dx = \begin{bmatrix} \text{Använd} \\ (**) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_i \int_0^L f \phi_i \, dx = \int_0^L f \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i \, dx = \underline{\int_0^L f v \, dx}$$

$\Rightarrow$ Alla $v \in V_H$ uppfyller svaga formen om ϕ_j $j = 1, \dots, N$ gör det.