F12 23/4-18

Integraler

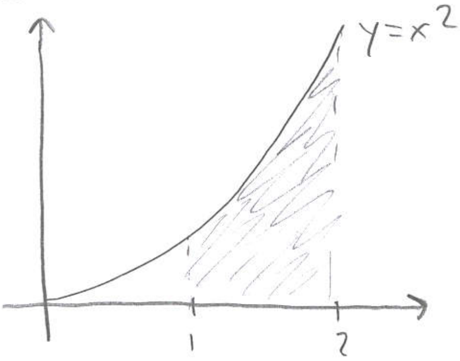
Introduktion

- En variabel

  Mål: räkna ut arean under en graf $y = f(x)$

  Verktyg: primitiv funktion

Ex) $f(x) = x^2$ över intervallet $[1,2]$



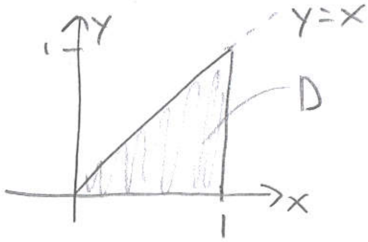
$$A = \int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

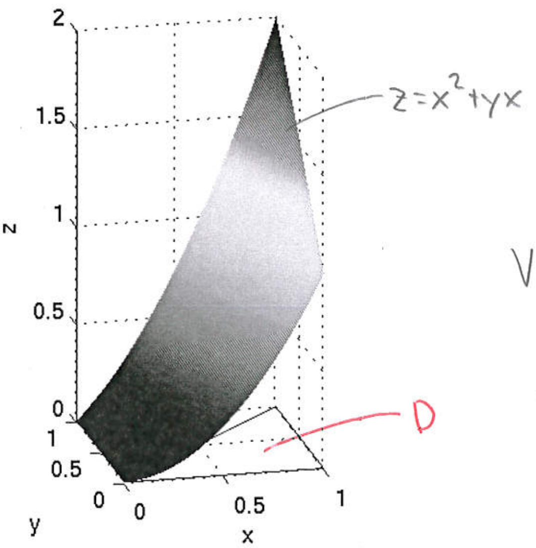
- Två variabler

  Mål: räkna ut volymen under en graf $z = f(x,y)$

  Verktyg: primitiv funktion

Ex) $f(x,y) = x^2 + yx$ över området $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$





$$V = \int_0^1 \int_0^x x^2 + yx\,dy\,dx = \int_0^1 \left[yx^2 + \frac{y^2}{2}x\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 x^3 + \frac{x^3}{2}\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

```
[X, Y] = meshgrid(0:0.01:1);
Z = X .^ 2 + X .* Y;

surf(X, Y, Z)
axis equal
shading interp
hold on
plot3([0 1 1 0], [0 0 1 0], [0 0 0 0])
```

$\longrightarrow$

I exemplet räknade vi ut dubbelintegralen genom att göra en enkelintegral i taget. Vi har inte visat att det är så dubbelintegraler räknas ut än, vi har inte ens definierat vad en dubbelintegral är. Det ska vi göra nu.

Teori – definition av dubbelintegral

1 variabel – resume

Vi repeterar hur enkelintegralen $\int_a^b f\,dx$ definieras.

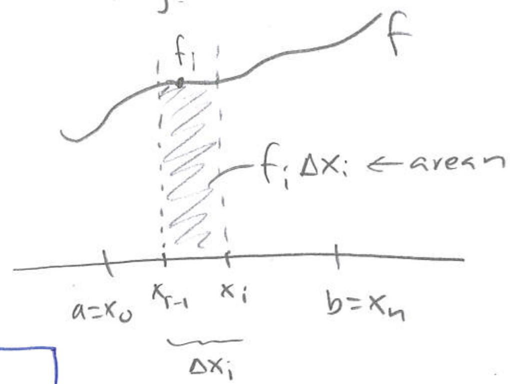
Dela upp $[a,b]$ enligt $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.
Denna uppdelning kallas partition och vi betecknar den P.

Beteckna:

- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ← intervallängd
- $f_i = f(\tilde{x}_i)$ där $\tilde{x}_i \in [x_i, x_{i-1}]$ ← funktionsvärdet i en godtyckligt vald punkt på intervallet
- $|P| = \max \Delta x_i$ ← största delintervallets längd

Riemannsumman av f på P definieras:

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta x_i$$



Def: f kallas integrerbar med integral $\int_a^b f\,dx = I$ om

$$\lim_{|P|\to 0} R(f,P) = I \quad \text{för alla val av } f_i.$$

Det handlar alltså om att dela in integrationsområdet i delintervall och "göra" staplar vars area summeras upp. Sen går antalet intervall mot ∞ och i gränsövergången fås:

$$\sum f_i \Delta x_i \longrightarrow \int f\,dx$$

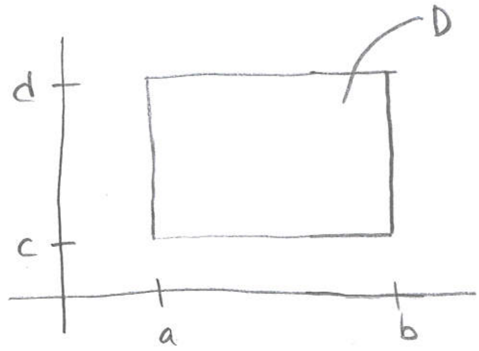
2 variabler – dubbelintegral

Liknande koncept som vid definition av $\int_a^b f\,dx$ används men istället för delinterval används "delrektanglar".

<u>Givet:</u> $f(x,y)$ och ett rektangulärt område D

<u>Mål:</u> definiera $\iint_D f(x,y)\,dA$

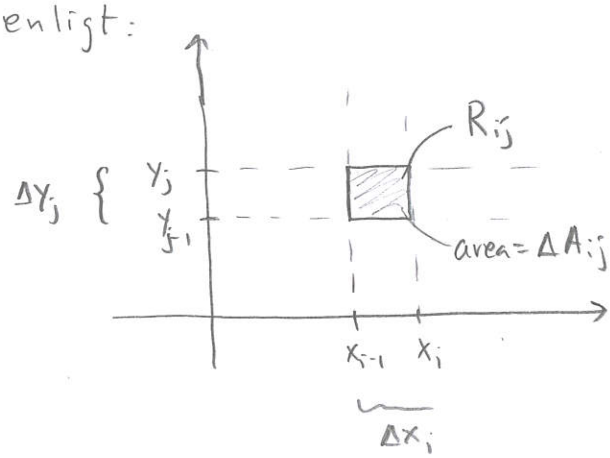
Låt $D = [a,b] \times [c,d]$ ← kartesisk produkt



Inför en partition genom att dela upp D i små rektanglar R_{ij} enligt:

$$\begin{cases} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d \end{cases}$$

där $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$



Beteckna:

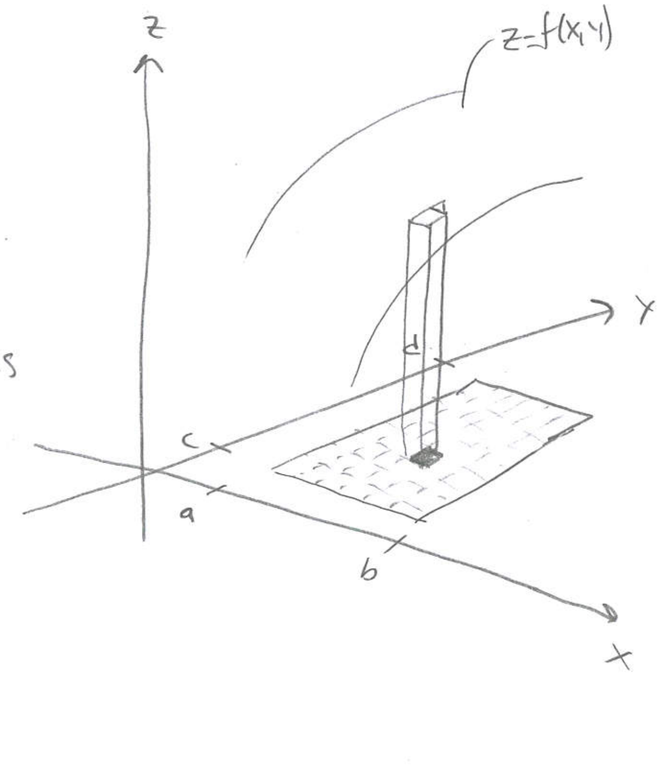
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- $\Delta y_j = y_j - y_j$

} ← intervallängd

- $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ ← area
- $d_{ij} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}$ ← diagonal
- $|P| = \max d_{ij}$
- $f_{ij} = f(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{ij})$ där $(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{ij}) \in R_{ij}$

<u>Riemannsumman</u> av f på P definieras

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\,\Delta A_{ij}$$



Def: f är integrerbar över rektangeln D med dubbelintegral

$$\iint_D f(x,y)\,dA = I$$

om

$$\lim_{|P|\to 0} R(f,P) = I$$

för alla möjliga val av f_{ij}.

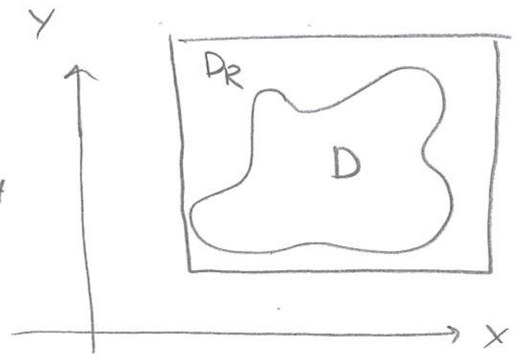
Nu har vi definierat dubbelintegralen m.h.a. Riemannsummor, men notera:

- vi har bara definierat $\iint_D f\,dA$ över rektanglar
- vi har inte berört hur $\iint_D f\,dA$ räknas ut i praktiken

Utvidgning till begränsade D

Givet: f och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ begränsad

Mål: Definiera $\iint_D f\,dA$



Låt $D_R \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en rektangel så att $D \subseteq D_R$. Definiera funktionen f_R enligt:

$$f_R(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{om } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Vi definierar nu $\iint_D f\,dA$ enligt:

$$\boxed{\iint_D f\,dA = \iint_{D_R} f_R\,dA}$$

Kan vi säga något om när $\iint_D f\,dA$ existerar?

SATS

Om f är kontinuerlig på D och D är sluten, begränsad och har en rand som består av ändligt många kurvor av ändlig längd.

Då är f integrerbar på D, dvs $\iint_D f\,dA$ existerar.

Grundläggande egenskaper för $\iint_D f\,dA$

a) $\text{area}(D) = \iint_D 1\,dA$ ← fundera varför detta gäller (vad är $\int_a^b 1\,dx$?)

b) volymen under $z=f(x,y)$ på området D $\Big\} = \iint_D f\,dA$ ← se detta framför dig grafiskt

c) Linjaritet:

$c,d \in \mathbb{R}$ (konstanter)

f,g funktioner

$$\boxed{\iint_D cf+dg\,dA = c\iint_D f\,dA + d\iint_D g\,dA}$$

d) Olikhet:

$$g \le f \text{ på } D \implies \iint_D g\,dA \le \iint_D f\,dA$$

e) Additivitet över områden

Om $D = D_1 \cup D_2$ där D_1 och D_2 ej överlapper gäller:

$$\boxed{\iint_D f\,dA = \iint_{D_1} f\,dA + \iint_{D_2} f\,dA}$$

Beräkning av dubbelintegraler – upprepad integration

Det finns en sats som säger att en dubbelintegral kan delas upp i två enkelintegraler, så att vi kan använda det vi vet sen tidigare:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

och därmed räkna ut $\iint_D f\,dA$ på ett enkelt sätt.

Det går om D är av en typ som kallas "enkel".

Def $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kallas

- y-enkel om

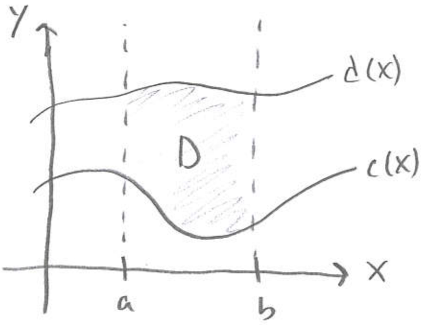
$$D = \{(x,y) : a \le x \le b \,,\; c(x) \le y \le d(x)\}$$

där $c(x), d(x)$ är kontinuerliga

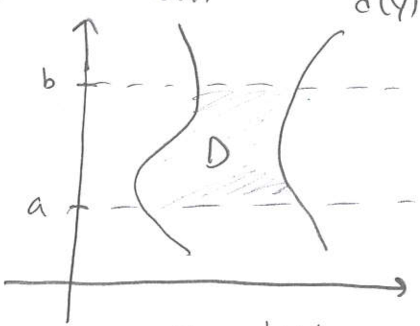
- x-enkel om

$$D = \{(x,y) : a \le y \le b \,,\; c(y) \le x \le d(y)\}$$

där $c(y), d(y)$ är kontinuerliga



y-enkel



x-enkel

SATS – upprepad integration

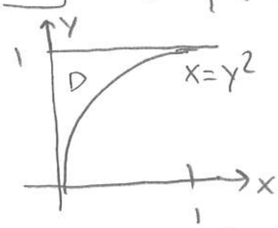
Om D är y- eller x-enkel så gäller:

y-enkel: $$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

respektive:

x-enkel: $$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{c(y)}^{d(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Ex) $D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1 \,,\; 0 \le x \le y^2\} \Rightarrow$ x-enkel

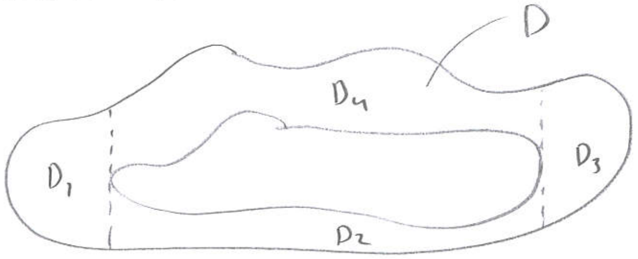


$$I = \iint_D x^2 y\,dA$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} x^2 y\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} y\right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 \frac{y^7}{3}\,dy$$

$$= \left[\frac{y^8}{24}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

De flesta områden $D \subseteq \mathbb{R}^2$ går att dela upp i x-/y-enkla områden: $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_N$ och så kan egenska e) användas.



$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

D_1, D_3 x-enkla

D_2, D_4 y-enkla

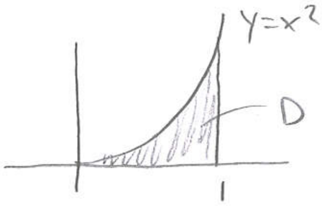
Generaliserade integraler

Låt $I = \iint_D f(x,y)\,dA$.

Om D och/eller f är obegränsad kallas I för generaliserad.

En generaliserad integral kan vara antingen konvergent eller divergent.

Ex) $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$



$f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}$ $\iint_D f(x,y)\,dA$ generaliserad eftersom f är obegränsad på D.

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$\int_0^1 \frac{-1}{x+x^2} - \frac{-1}{x+0}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\frac{1+x-1}{1+x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x}\,\frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \underline{\underline{\ln 2}}$$

(Korrekt är egentligen att skriva
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx$$
)

$\longrightarrow$

→ Men, funkar upprepad integration för generaliserade integraler? Exemplet tyder på det men det funkar bara om:

$f(x,y) \geq 0$ på D

eller

$f(x,y) \leq 0$ på D.

Det funkar däremot inte om $f(x,y)$ har både positiva och negativa värden på D, $\iint f\,dx\,dy$ och $\iint f\,dy\,dx$ kan då ge olika resultat vilket vore inkonsekvent.

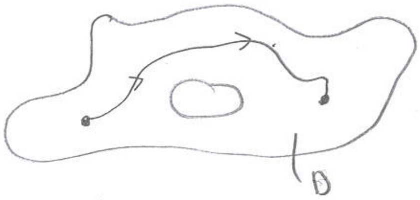
Medelvärdessatsen för integral

M.V.S.

Återblick:

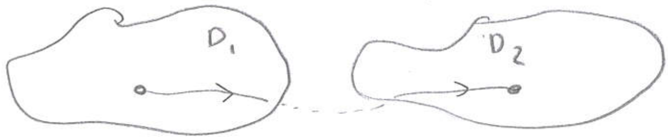
- M.V.S. för derivata i 1 variabel: $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ $\quad c \in [a,b]$
- M.V.S. för integral i 1 variabel: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ $\quad c \in [a,b]$

Def $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är sammanhängande om två godtyckliga punkter i D kan förbindas med en kurva som ligger i D.



Sammanhängande

$D = D_1 \cup D_2$



Ej sammanhängande

SATS: M.V.S. för integraler

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara sluten, begränsad och sammanhängande, samt f vara kontinuerlig på D.

Då finns $(x_0, y_0) \in D$ så att

$$\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0,y_0) \cdot \text{area}(D)$$

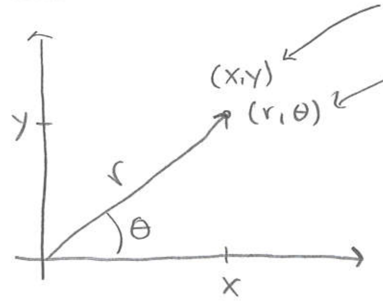
Def Medelvärdet av f över D, $\bar{f}$ är

$$\boxed{\bar{f} = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f\,dA}$$

Polära koordinater

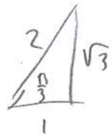
kartesiska koordinater

polära koordinater

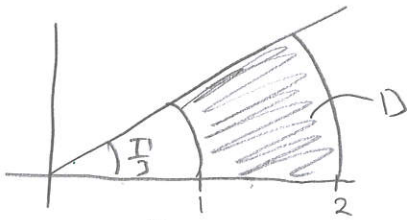


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$



Ex



$$f(x,y) = x$$

$$\iint_D f\,dA = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2 r\cos\theta \; r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 d\theta = \frac{7}{3}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{7}{3}\sin\frac{\pi}{3}$$

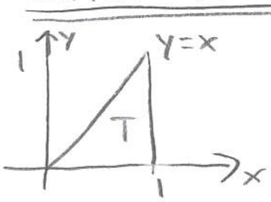
Varför?

$$= \frac{7}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

Mer om detta nästa gång.

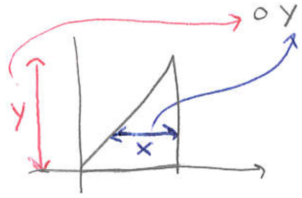
Extra – fler exempel

$$\iint_T xy\,dx\,dy$$



Variant 1:

$$\int_0^1\int_y^1 xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=y}^{x=1} dy$$

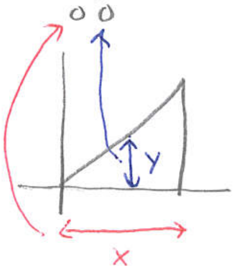


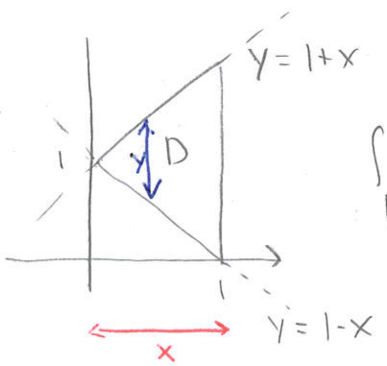
$$= \int_0^1 \frac{1^2}{2}y - \frac{y^2}{2}y\,dy =$$

$$= \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Variant 2:

$$\int_0^1\int_0^x xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x\,\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$





$$\iint_D x^2\,dA = \int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} x^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2 y\right]_{y=1-x}^{y=1+x} dx$$

$$= \int_0^1 x^2(1+x) - x^2(1-x)\,dx = 2\int_0^1 x^3\,dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$