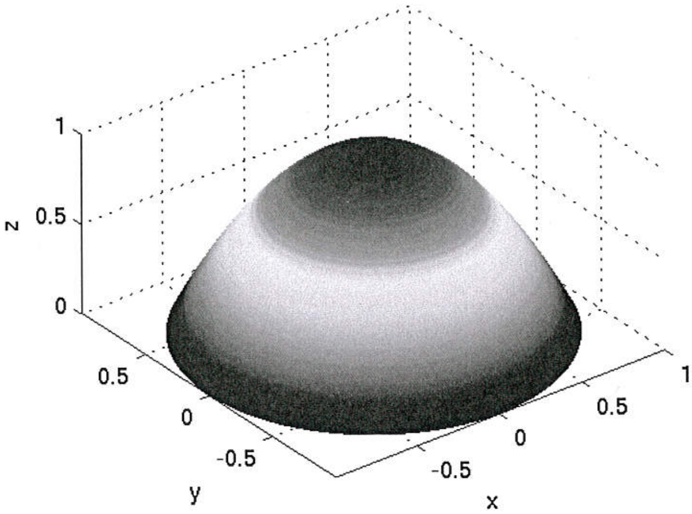
MVE255

$\boxed{F13}$ 24/4-18

Koordinater och variabelbyte

Ex] Volymen under grafen $z = 1 - x^2 - y^2$ över $z = 0$.



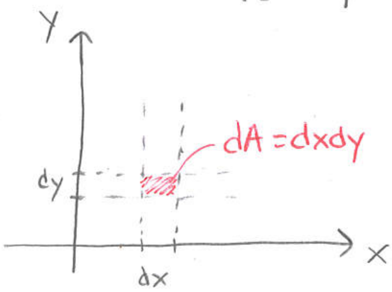

```
r = linspace(0, 1);
t = linspace(0, 2 * pi);
[R, T] = meshgrid(r, t);
X = R .* cos(T);
Y = R .* sin(T);
Z = 1 - X.^2 - Y.^2;

surf(X, Y, Z)
axis equal
shading interp
```

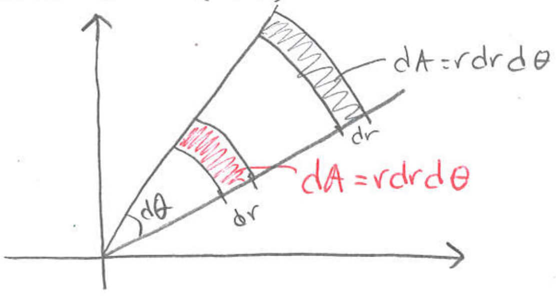
$$V = \iint_D 1 - x^2 - y^2 \, dx dy \quad \text{där } D \text{ är bottenytan: } D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$= [\text{Byt till polära koordinater}] = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) \, r \, dr d\theta = \underset{\uparrow \text{ varför?}}{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Areaelementet dA i en integral $\iint_D f \, dA$ är olika för olika koordinater:

- För kartesiska koordinater (x,y): $dA = dx dy$
- För polära koordinater (r,θ): $dA = r dr d\theta$





Vi ska nu bestämma dA för godtyckliga koordinater

Allmänt:

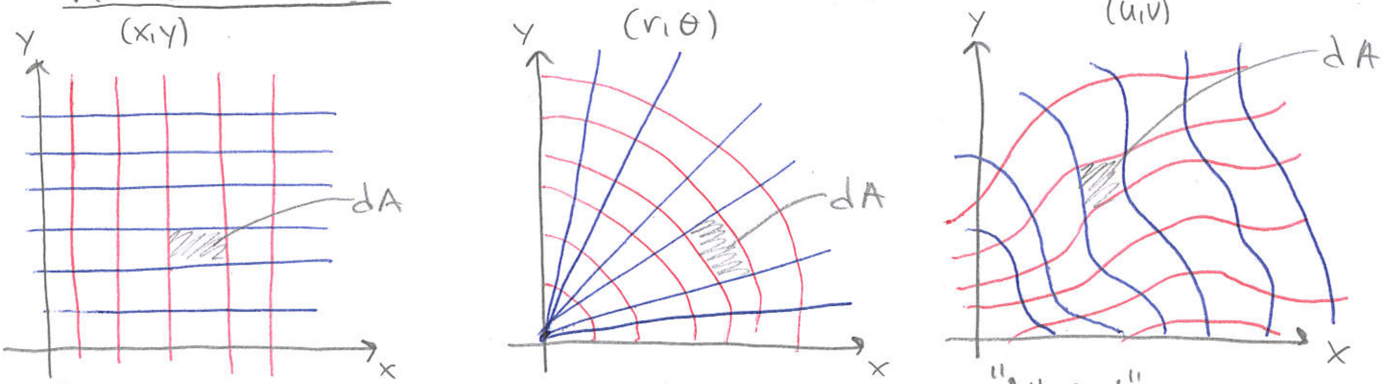
Antag att vi har det kartesiska koordinatsystemet (x,y) och något annat koordinatsystem (u,v), och att de två är relaterade enligt:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \quad \text{och/eller} \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Och så vill vi byta variabler från (x,y) till (u,v) i en integral:

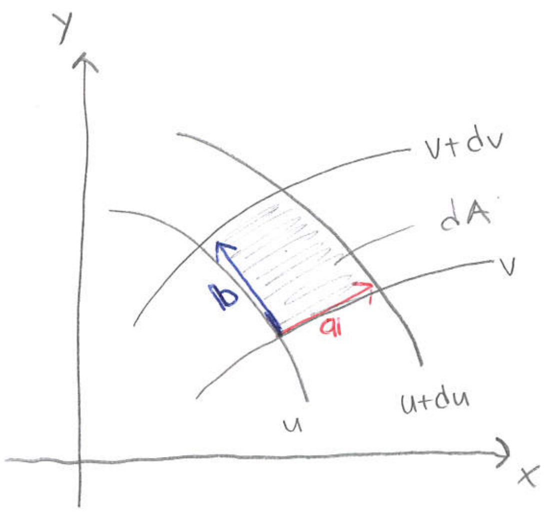
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\underbrace{\;\text{- - - - - -}\;}_{dA}$$

Vad blir dA?

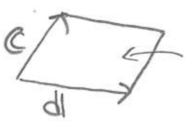


Kartesiska koordinater — Polära koordinater — "Allmänt"

Vi ritar upp ett godtyckligt areaelement:



Vi har en parametrisering: $\boxed{\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))}$

(Kom ihåg:  arean $= |\mathbf{c} \times \mathbf{d}|$)

Vi ser att areaelementet <u>ungefär</u> blir parallellogrammen , så arean blir:

$$\boxed{dA = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

(denna approximation kan visas bli exakt när du och dv blir godtyckligt små)

Vi ska nu ta fram $\mathbb{a}$ och $\mathbb{b}$

$\underline{\mathbb{a}:}$

Låt v vara fixerad (konstant) i $\mathbb{r} = \mathbb{r}(u,v)$

Då får vi en av de fyra kurverna i figuren, vilken?

Vi får

$$\mathbb{a} = \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} du = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) du$$

$\underline{\mathbb{b}:}$

Liknande: låt u vara fixerad (konstant) i $\mathbb{r} = \mathbb{r}(u,v)$.

Vi får

$$\mathbb{b} = \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv$$

Vi kan nu räkna ut $\mathbb{a} \times \mathbb{b}$:

$$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right) du\,dv$$

$$\Rightarrow \quad |\mathbb{a} \times \mathbb{b}| = \Bigg| \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}_{\text{betecknas}} \Bigg| du\,dv = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\left(\mathbb{r}'(u,v) \right)$$

Jacobimatrisen

Vi sammanfattar detta i en sats: $\longrightarrow$

SATS

Om $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ beskriver ett variabelbyte från ett område S i (u,v)-systemet till ett område D i (x,y)-systemet gäller:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv}$$

Regel: $\boxed{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}}$

Ex) $\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix} \Rightarrow \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta - (-r)\sin^2\theta = r$

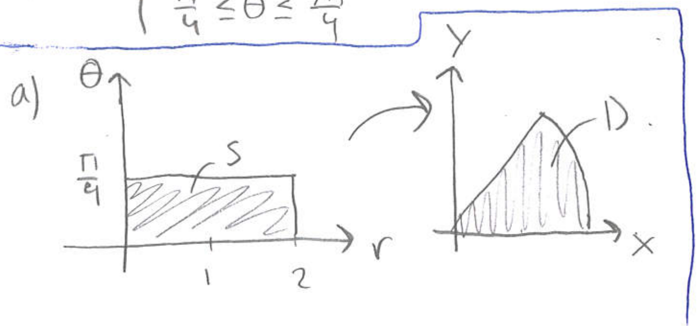
$$\Rightarrow \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = |r| = \underline{\underline{r}}$$

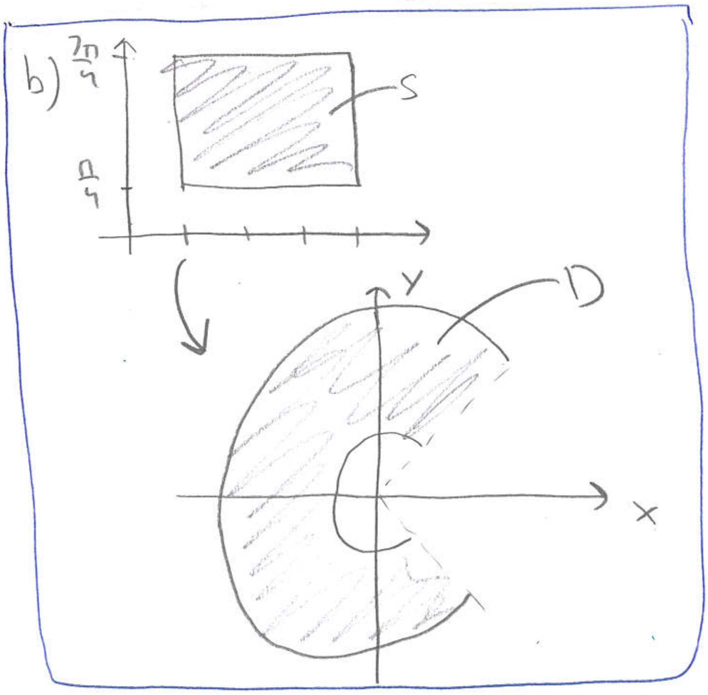
Ex) Skissa D i (x,y)-planet om S i (r,θ)-planet ges av:

a) $S: \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$

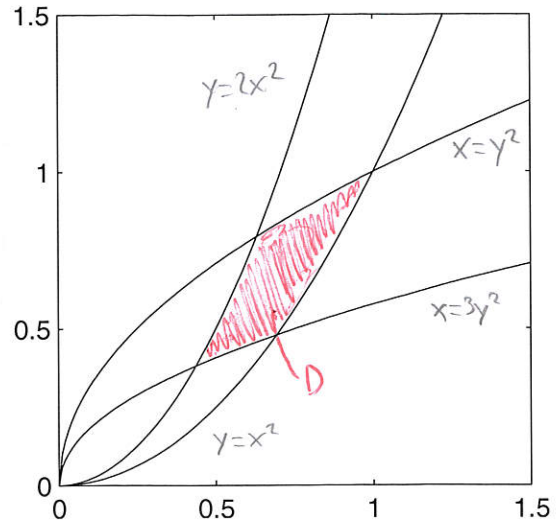
b) $S: \begin{cases} 1 \le r \le 4 \\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{7\pi}{4} \end{cases}$

a)





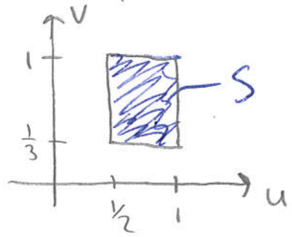
Ex



Genom följande variabelbyte:

$$u=\frac{x^2}{y} \qquad v=\frac{y^2}{x}$$

kan D representeras "enkelt" i (u,v)-systemet som S:



Vi vill räkna ut $\iint\limits_D 1\,dxdy$

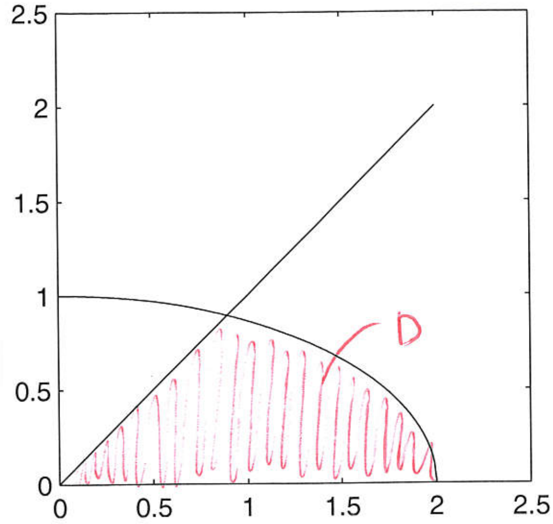
Vi använder variabelbytet:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & \frac{-x^2}{y^2} \\ \frac{-y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix}=4-1=3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{3}$$

$$\iint\limits_D dxdy=\int_{\frac{1}{3}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{1}{3}\right|dudv=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

Ex

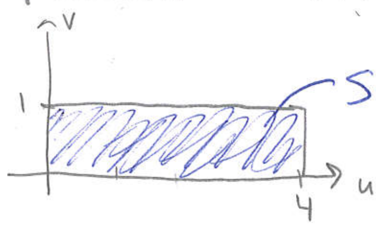


Räkna ut $\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy$.

Genom följande variabelbyte

$$u=x^2+4y^2 \qquad v=\frac{y}{x}$$

kan D representeras i (u,v)-systemet som S:



Variabelbytet ger:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 2x & 8y \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}=2+8\frac{y^2}{x^2}=2+8v^2$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\frac{1}{2+8v^2}\right|=\frac{1}{2+8v^2}$$

$$\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy=\int_0^4\int_0^1 v\,\frac{1}{2+8v^2}\,dvdu$$

$$=4\left[\frac{\ln(2+8v^2)}{16}\right]_0^1=\frac{1}{4}(\ln 10-\ln 2)$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{10}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{4}\ln 5}}$$

Trippelintegral

Definieras på liknande sätt som dubbelintegral fast med små rätblock istället för små rektanglar som grundelement för Riemannsummorna.

De räknas ut på liknande sätt också, d.v.s. upprepad integration.

Ex

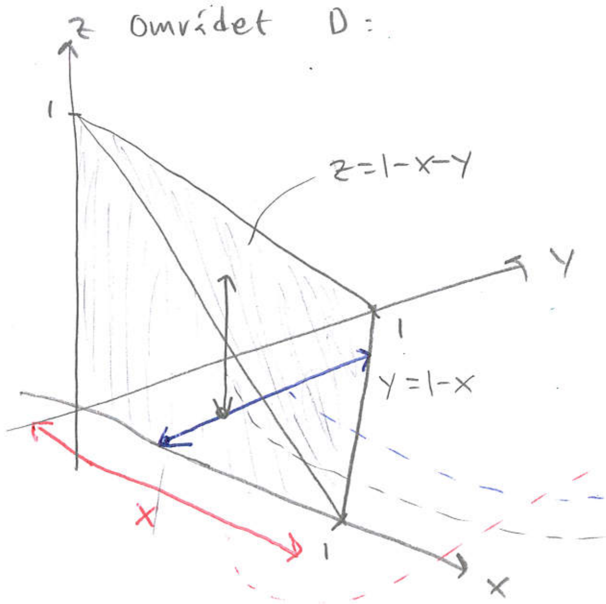
$$\int_0^1\int_1^3\int_1^4 xy^2+z^3\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_1^3 \left[\frac{x^2}{2}y^2+z^3x\right]_{x=1}^{x=4} dy\,dz =$$

$$= \int_0^1\int_1^3 \frac{15}{2}y^2+3z^3\,dy\,dz = 1\cdot\frac{15}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^3 + 2\cdot 3\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^1 =$$

↑ Vad hände?

$$= \frac{15}{2}\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right)+6\,\frac{1}{4} = \frac{143}{2}$$

Ex Beräkna volymen av området D:



$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x} 1-x-y\,dy\,dx = \int_0^1\left[y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x}dx = \int_0^1 1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \left[\frac{-(1-x)^3}{6}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

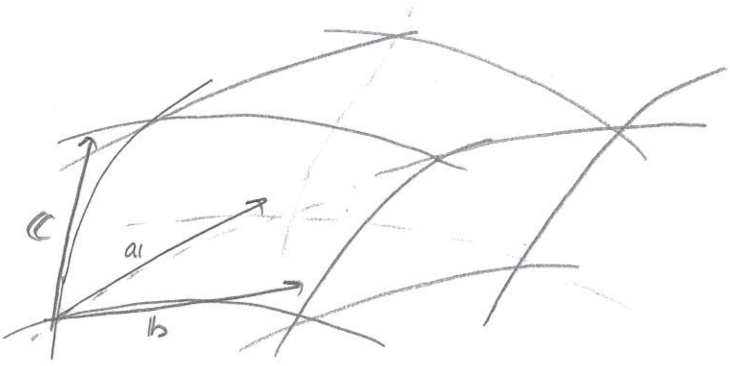
Variabelbyte i trippelintegral

Konceptet är liknande som för dubbelintegral.

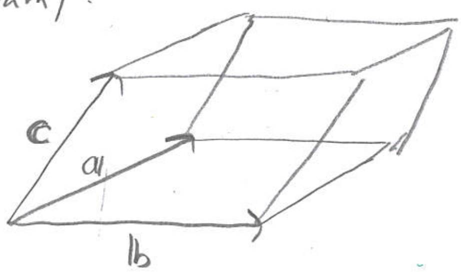
Vi har nu 3 variabler:

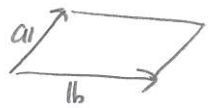
$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v,w)$$

Vi har ett godtyckligt volymelement (istället för areaelement):



Som vi uppskattar med en parallellepiped (istället för parallellogram):





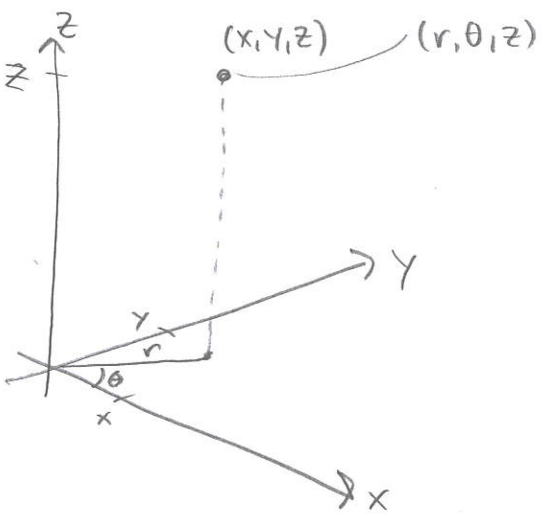
med $\quad$ volym $= |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$ $\quad$ (istället för area $= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$)

Vi får

$$\boxed{dV =} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw \right) \right| = \_\,\_\,\_\,\_ =$$

$$\boxed{\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw}$$

Cylindriska koordinater (r,θ,z)



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}}$$

$(r^2 = x^2+y^2)$

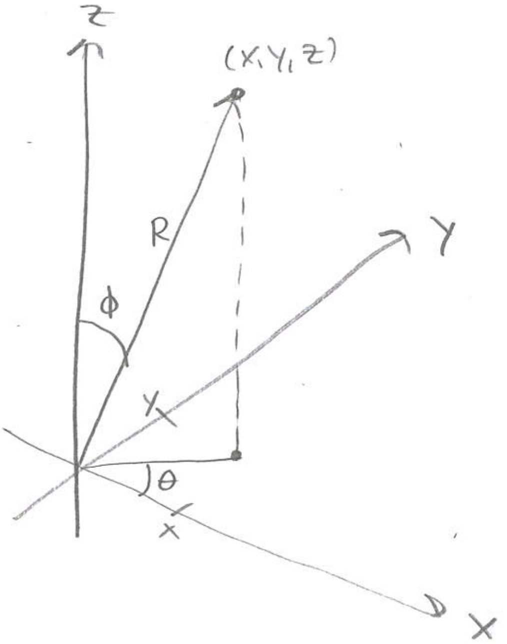
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| dr\,d\theta\,dz = |r|\,dr\,d\theta\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dV = r\,dr\,d\theta\,dz}$$

Ibland även ρ

Sfäriska koordinater (R,ϕ,θ)



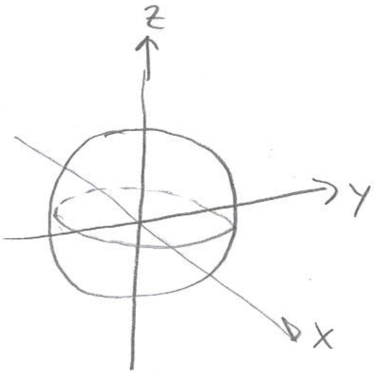
$$\boxed{\begin{aligned} x &= R\cos\theta\,\sin\phi \\ y &= R\sin\theta\,\sin\phi \\ z &= R\cos\phi \end{aligned}}$$

$(R^2 = x^2+y^2+z^2)$

$$\boxed{0 \le \phi \le \pi}$$

$$\boxed{dV = R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta}$$

Ex] Volymen av enhetsklotet D



$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \begin{bmatrix}\text{byter till}\\ \text{sfäriska}\end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} R^2 \sin\phi \, dR\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2\pi \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} \left[\frac{R^3}{3}\right]_0^{1} =$$

$$= 2\pi\,(+1-(-1))\,\frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Fysikaliska tillämpningar

Givet en kropp $D \subseteq \mathbb{R}^3$ med densitet $\rho(x,y,z)$ $[kg/m^3]$ blir kroppens massa

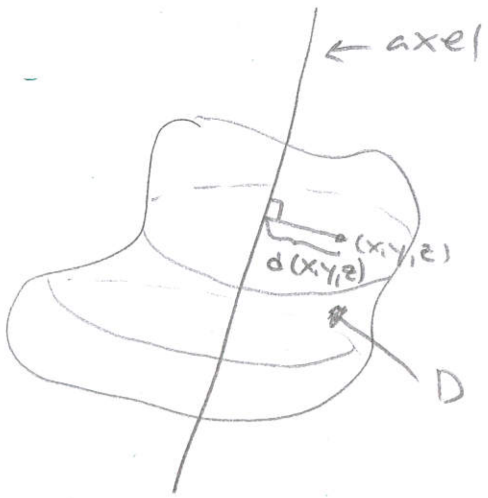
$$\boxed{m = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dV}$$

Kroppens masscentrum $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ blir:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m}\iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,dV \\ \bar{y} &= \frac{1}{m}\iiint_D y\,\rho(x,y,z)\,dV \\ \bar{z} &= \frac{1}{m}\iiint_D z\,\rho(x,y,z)\,dV \end{aligned}}$$

Tröghetsmomentet m.a.p. en axel blir

$$\boxed{I = \iiint_D \left(d(x,y,z)\right)^2 \rho(x,y,z)\,dV}$$



där $d(x,y,z)$ är minsta avståndet till axeln från punkten (x,y,z).