Skalära fält och vektorfält

Inom fysiken kallas vissa typer av funktioner för skalära fält, och vissa typer för vektorfält.

Låt $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ vara en funktion där $m=2$ eller $m=3$.
D.v.s. vi är i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$.

- Om $n=1$ ($f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eller $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)
  kallas f ett skalärt fält (f antar skalära värden)

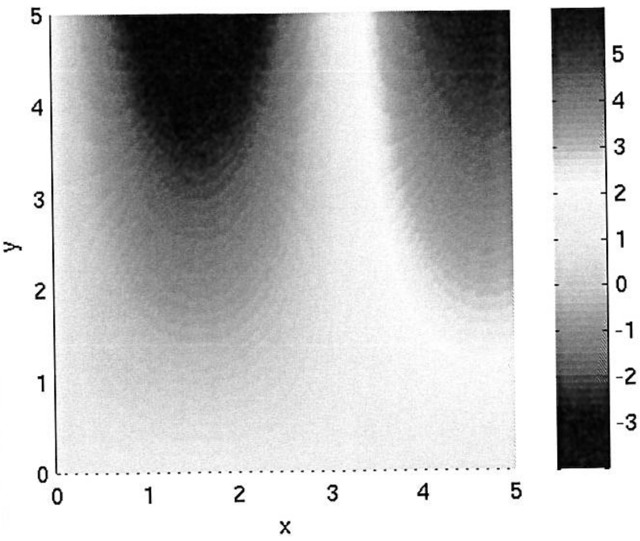
- Om $n=2$ eller $n=3$ ($f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eller $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)
  kallas f ett vektorfält (f antar vektorvärden)

Exempel från fysiken

- Skalära fält:
  - Temperaturfält $T(x,y,z)$ [K]
  - Tryckfält $P(x,y,z)$ [Pa]
  - Höjd över havet $h(x,y,z)$ [m]
  - Luftfuktighet $\phi(x,y,z)$

- Vektorfält
  - Hastighetsfält $\mathbb{v}(x,y,z)$ [m/s]
  - Temperaturgradient $\nabla T(x,y,z)$ [K/m]
  - Kraftfält $\mathbb{F}(x,y,z)$ [N]

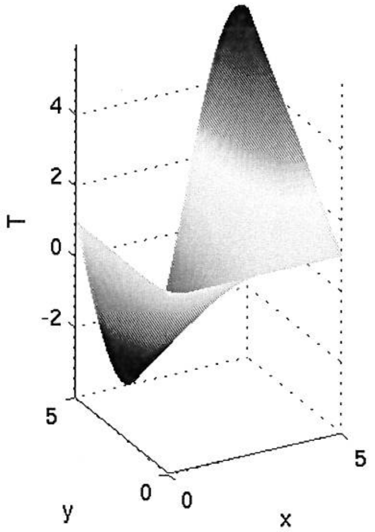
Ex) Skalärt fält $T(x,y) = 1 - y\sin x$



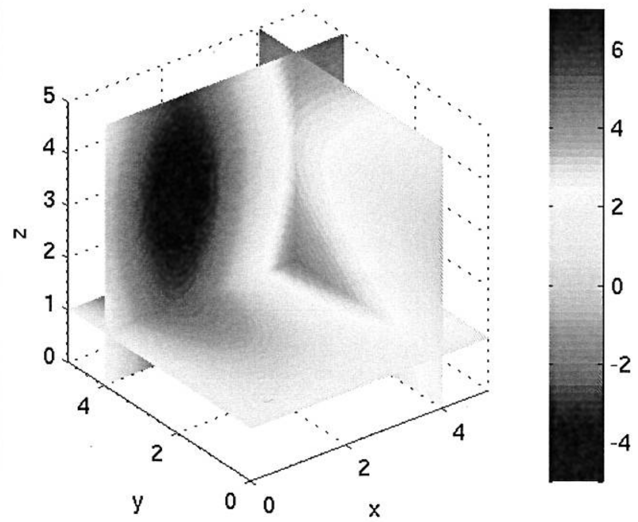

```
[X, Y] = meshgrid(0:0.05:5);
Z =   1 - sin(X) .* Y;

surf(X, Y, Z)
axis equal
shading interp
view([0 90])
colorbar

figure
surf(X, Y, Z)
axis equal
shading interp
```



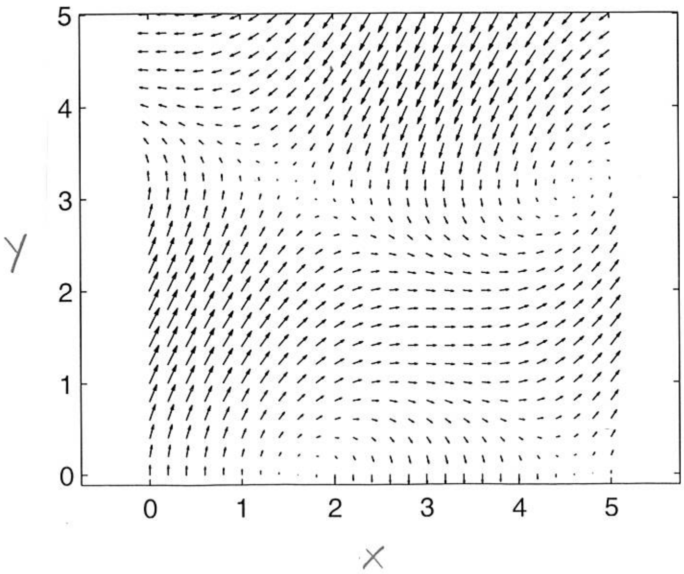
Ex) Skalärt fält $T(x,y,z) = 1 - y\sin x + \cos z$




```
[X, Y, Z] = meshgrid(0:0.05:5);
V =   1 - sin(X) .* Y + cos(Z);

slice(X, Y, Z, V, 4, 4, 1)
axis equal
shading interp
colorbar
```

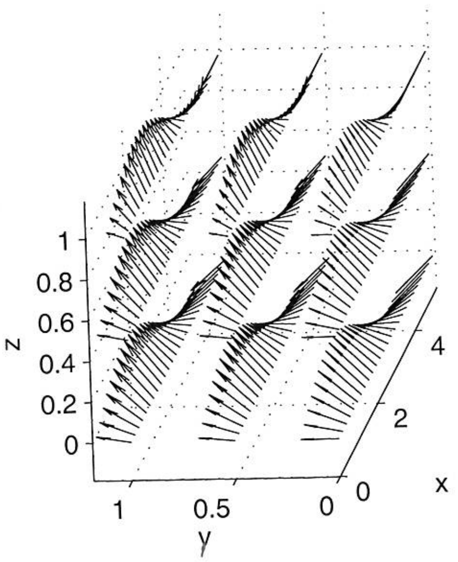
Ex) Vektorfält $u(x,y) = (\sin y, \cos x)$




```
[X, Y] = meshgrid(0:0.2:5);
U = sin(Y);
V = cos(X);

quiver(X, Y, U, V)
axis equal
```

Ex Vektorfält $\mathbb{F}(x,y,z) = (\sin y, \cos z, \sin x)$




```
[X, Y, Z] = meshgrid(0:0.2:5, 0:0.5:1, 0:0.5:1);
U = sin(Y);
V = cos(Z);
W = sin(X);

quiver3(X, Y, Z, U, V, W)
axis equal
```

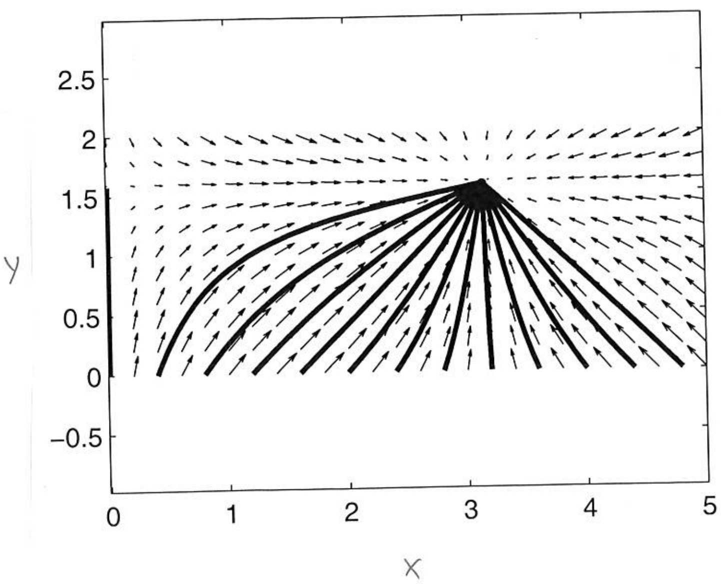
Fältlinje (strömlinje, kraftlinje)

Låt $\mathbb{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ med $n=2$ eller $n=3$ vara ett vektorfält.

Def: Fältlinjer är kurvor sådana att $\mathbb{F}(x,y,z)$ är tangent till kurvan som går igenom (x,y,z).

Ex

Hastighetsfält $\mathbb{V}(x,y) = (\sin x, \cos y)$



Hastighetsfältet (pilarna)

Några strömlinjer (tjocka linjer)

```
[X, Y] = meshgrid(0:0.2:5, 0:0.2:2);
U = sin(X);
V = cos(Y);

startx1 = 0:0.4:5;
starty1 = 0 * startx1;

quiver(X, Y, U, V)
axis equal
hold on
h = streamline(X, Y, U, V, startx, starty)
set(h,'LineWidth',2,'Color','r')
```

Vi ska nu visa en metod för att räkna ut fältlinjer från ett givet vektorfält $\mathbb{F}(x,y,z)$.

Låt $\mathbb{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ vara en fältlinje (vi vill hitta $x(t), y(t)$ och $z(t)$).

Definitionen av fältlinje ger oss följande samband

$$\boxed{\mathbb{r}'(t) = \lambda(t)\,\mathbb{F}(\mathbb{r}(t))} \qquad (*)$$

Dvs: tangenten ($\mathbb{r}'(t)$) till kurvan $\mathbb{r}(t)$ är parallell med $\mathbb{F}$.

Om $\mathbb{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ blir $(*)$

$$(*)\quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda(t)\, F_1(x,y,z) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \lambda(t)\, F_2(x,y,z) \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = \lambda(t)\, F_3(x,y,z) \end{cases}}$$

Notera att om $\mathbb{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ får vi en färre ekvation i $(*)$

Vi löser ut $\lambda(t)\,dt$ och får:

$$\lambda(t)\,dt = \boxed{\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}}$$

vilket kan lösas med variabelseparering.

Ex)

Hastighetsfält: $\mathbb{v}(x,y) = \Omega(-y,x)$, $\Omega \in \mathbb{R}$. Bestäm strömlinjerna.

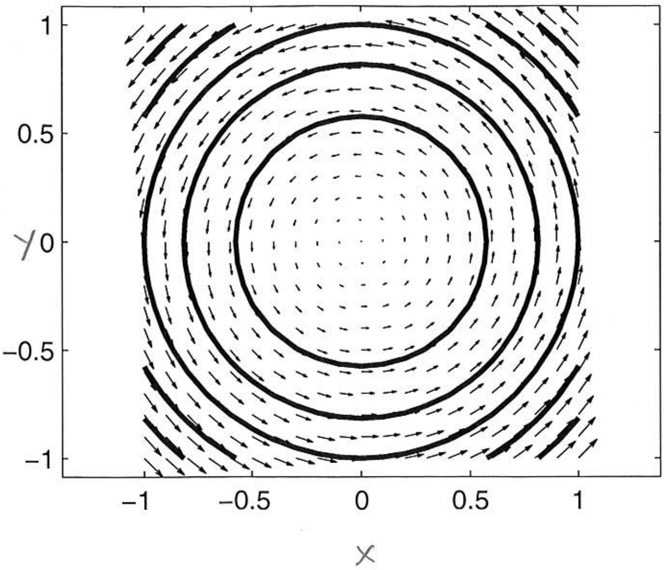
Vi får $\dfrac{dx}{-\Omega y} = \dfrac{dy}{\Omega x} \Rightarrow x\,dx = -y\,dy \Rightarrow \int x\,dx = -\int y\,dy$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{-y^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C}$$

$\leftarrow$ Våra strömlinjer. Olika C ger olika strömlinjer.

$\longrightarrow$

→ Plot for $\Omega = 1$




```
[X, Y] = meshgrid(-1:0.1:1);
U = -Y;
V = X;

quiver(X, Y, U, V)
axis equal
hold on
contour(X, Y, X.^2 + Y.^2, 5, 'LineWidth',2)
```

Konservativa fält

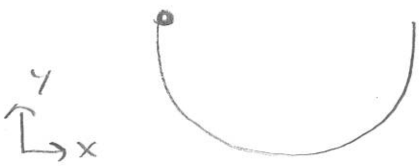
Ex Låt $\mathbb{G} = (0, -mg)$ vara ett kraftfält, gravitationsfältet.

Låt $\mathbb{F} = \mathbb{G} + \mathbb{H}$ där $\mathbb{H}$ är luftmotstånd och friktion.

Vi studerar två fall där en kula släpps från vila i en half-pipe:

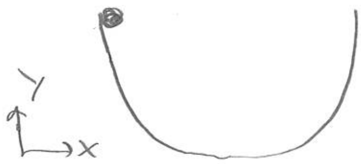
Fall 1

$\mathbb{G}$ verkar på kulan



Fall 2

$\mathbb{F}$ verkar på kulan



Vi släpper kulan, vad händer i de två fallen när tiden går?

Fall 1: kulan kommer rulla ner och upp, till höger och tillbaka i all evighet.

Fall 2: kulan kommer rulla ner och upp, men varje sväng tappa höjd tills den till slut stannar längst ner.

- I fall 1 bevaras energin
- I fall 2 försvinner energi som värme

Ett kraftfält där energin bevaras (konserveras) kallas konservativt.

→

Matematiskt definieras detta:

Def: Låt $\mathbb{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ett vektorfält.
Om det finns en funktion $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ så att

$$\boxed{\mathbb{F} = \nabla \phi}$$

kallas $\mathbb{F}$ ett konservativt fält.

Funktionen ϕ kallas potential till $\mathbb{F}$.

(Dvs: om $\mathbb{F}$ är gradienten av en skalär funktion är $\mathbb{F}$ konservativt)

(Tänk: $\nabla\phi$ visar hur ϕ växer. Om ett vektorfält $\mathbb{F}$ kan beskriva hur en funktion växer är $\mathbb{F} = \nabla\phi$, alltså konservativt)

Notera:

- Alla funktioner $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ är potentialer till ett konservativt fält, nämligen $\mathbb{F} = \nabla\phi$.
- Alla vektorfält $\mathbb{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är inte konservativa, dvs: det finns inte alltid ett $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ så att $\nabla\phi = \mathbb{F}$.

Ex) Visa att $\mathbb{F} = (0, -mg)$ är konservativt, dvs hitta potential.

Hitta $\phi = \phi(x,y)$ så att $\nabla\phi = \mathbb{F}$, dvs:

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -mg \end{cases}$$

Löser (*), metod 1

$(*) \Rightarrow \phi(x,y) = C_1(y)$

$\phi(x,y) = -mgy + C_2(x)$

Från $\phi(x,y) = C_1(y)$ ser vi att $C_2(x)$ ej innehåller x

Vi får:

$\phi(x,y) = -mgy + C$

Löser (*), metod 2

$\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \phi(x,y) = C_1(y)$

$\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y} C_1(y) = C_1'(y) = -mg$

$\Rightarrow C_1'(y) = -mg \Rightarrow C_1(y) = -mgy + C$

$\Rightarrow \phi(x,y) = -mgy + C$

Vi hittade en potential ϕ så att $\nabla\phi = \mathbb{F}$

$\Longrightarrow \mathbb{F}$ konservativt.

SATS

$\mathbb{F}$ konservativt medför

- när $\mathbb{F} = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ att

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}}$$

- när $\mathbb{F} = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ att

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$	$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$	$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$

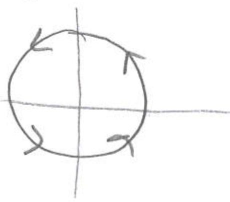
Denna sats kan användas för att undersöka om ett $\mathbb{F}$ kan vara konservativt, inte för att av avgöra att $\mathbb{F}$ är konservativt.

Ex] $\mathbb{V}(x,y,z) = (-y, x, 0)$ konservativt?

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1 \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$$

$-1 \neq 1 \implies \mathbb{V}$ är ej konservativt.

Notera: $\mathbb{V}$ är vektorfältet i plotten på sida 5.
Kom ihåg vad vi skrev efter definitionen av konservativa fält på sida 6, om att ett konservativt fält ska beskriva hur en funktion växer.
Om $\mathbb{V}$ hade beskrivit hur ett ϕ växer skulle plotten på sida 5 säga att funktionen växer när en går runt i cirklar:



men detta är ju omöjligt, ϕ kan inte växa hela tiden när en går runt i en cirkel.
Så ser vi att $\mathbb{V}$ inte kan vara konservativt.

Bevis av satsen för fallet $\mathbb{F} = (F_1(x,y), F_2(x,y))$

Eftersom $\mathbb{F}$ är konservativt vet vi att det finns $\phi = \phi(x,y)$ så att

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 \end{cases}$$

då får vi:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{byter ordning} \\ \text{på derivator}}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} F_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Ex) $\mathbb{F} = (x, y, 0)$ konservativt?

1.) Testa satsen för att se om vi kan säga att $\mathbb{F}$ inte är konservativt.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = 0$$

$\Rightarrow$ vi kan ej avgöra från detta test om $\mathbb{F}$ är konservativt

2.) Ställ upp potentialekvationerna

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x,y,z) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x,y,z) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= F_3(x,y,z) \end{aligned}} \begin{aligned} &= x \\ &= y \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.) Lös potentialekvationerna, om det går $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ är konservativt

Metod 1

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x \Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + C_1(y,z) \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = y \Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{y^2}{2} + C_2(x,z) \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \Rightarrow \phi(x,y,z) = C_3(x,y) \qquad \text{(iii)}$$

Vi ser från (iii) att ϕ inte innehåller något z,

$\Rightarrow C_1(y,z) = C_1(y)$ och $C_2(x,z) = C_2(x)$

Alltså: $\begin{cases} \phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + C_1(y) & (*) \\ \phi(x,y,z) = \frac{y^2}{2} + C_2(x) & (**) \end{cases}$

(*) säger att ϕ:s enda x-term är $\frac{x^2}{2}$ och

(**) säger —"— y-term är $\frac{y^2}{2}$

Vi får $\Rightarrow$

$$\underline{\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C}$$

Metod 2

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x \Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + C_1(y,z)$$

$$\underline{0} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2} + C_1(y,z)\right) = \underline{\frac{\partial}{\partial z} C_1(y,z)} \Leftrightarrow C_1(y,z) = D_1(y)$$

$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + D_1(y)$$

$$\underline{y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + D_1(y)\right) = \underline{D_1'(y)} \Leftrightarrow D_1(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \underline{\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C}$$

Ex/ Vi såg att $N(x,y,z) = (-y, x, 0)$ inte var konservativt.
Vad händer om vi försöker lösa:

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = -y \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Metod 1

$$(*) \Longrightarrow \begin{cases} \phi(x,y,z) = -yx + C_1(y,z) & \text{(i)} \\ \phi(x,y,z) = yx + C_2(x,z) & \text{(ii)} \\ \phi(x,y,z) = C_3(x,y) & \text{(iii)} \end{cases}$$

(i) säger att ϕ:s enda x-term är $-yx$
men (ii) innehåller yx. Då måste $C_2(x,z)$ innehålla $-2yx$
vilket är omöjligt då $C_2(x,z)$ inte beror på y
$\Longrightarrow$ $(*)$ ej lösbart.

Metod 2

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -y \Rightarrow \phi(x,y,z) = -yx + C_1(y,z)$$

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-yx + C_1(y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z} C_1(y,z) \Rightarrow C_1(y,z) = D_1(y)$$

$$x = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-yx + D_1(y)\right) = -x + D_1'(y) \Rightarrow D_1(y) = x^2 + C$$

Omöjligt: kan inte innehålla x om den bara beror på y.