F15 3/5-18

Fyra viktiga integraler

Vi ska gå igenom fyra viktiga typer av integraler.

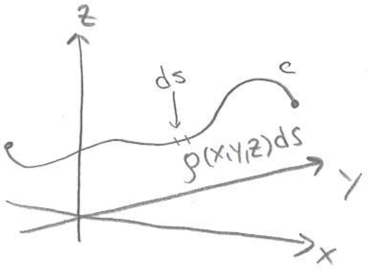
- Två är integraler längs en kurva (kurvintegral).
- Två är integraler över en yta (ytintegral)
- I två integrerar vi en skalär funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- I två integrerar vi ett vektorfält $\mathbb{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Exempel på tillämpningar

Nedan följer ett exempel för varje integraltyp.

A) Givet: en tråd c i $\mathbb{R}^3$ och dess längddensitet $\rho(x,y,z)$ $[kg/m]$

Mål: räkna ut trådens massa

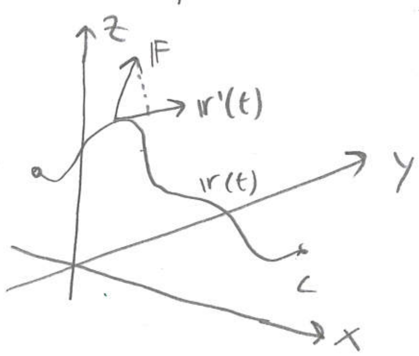


$$\boxed{\int_C \rho\, ds}$$

$\left(\text{Tänk: } \sum \rho\, \Delta s \to \int \rho\, ds\right)$

B) Givet: en partikelbana c och ett kraftfält $\mathbb{F}(x,y,z)$ $[N]$

Mål: räkna ut arbetet fältet utövar på en partikel som färdas längs c (kom ihåg: arbete = kraft • sträcka)

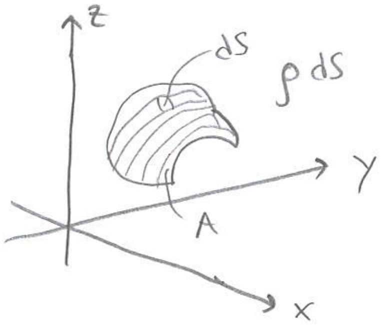


$$\boxed{\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}}$$

$$\left(\sum \mathbb{F} \cdot \frac{\mathbb{r}'}{|\mathbb{r}'|} \Delta s \to \int \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} \right)$$

C] Givet: en yta A i $\mathbb{R}^3$ och dess ytdensitet $\rho(x,y,z)\left[\frac{kg}{m^2}\right]$

Mål: räkna ut ytans massa

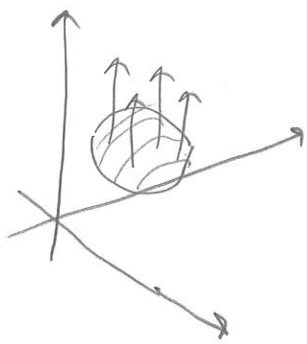


$$\boxed{\iint_A \rho\, dS}$$

↑ start S för area element

D] Givet: en yta A i $\mathbb{R}^3$ och ett hastighetsfält $\mathbb{V}(x,y,z)$ för en fluid.

Mål: räkna ut volymsflödet genom A



$$\boxed{\iint_A \mathbb{V}\cdot\hat{\mathbb{N}}\, dS}$$

↑ $\hat{\mathbb{N}}$ är ytans normal

Nu ska vi titta närmare på hur vi räknar ut dessa fyra typer av integraler.

Kurvintegraler: A och B

För att lösa A och B parametriserar vi kurvan C med <u>en</u> parameter:

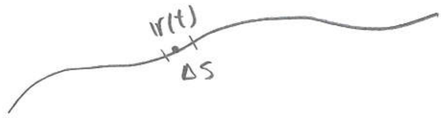
$$\boxed{\mathbb{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad a \le t \le b}$$

Vi minns också:

bäglängdselementet $\boxed{ds = |\mathbb{r}'(t)|\,dt}$

I fall A tänker vi oss att vi tar funktionsvärdet i $\mathbf{r}(t)$ gånger en liten kurvlängd Δs:

$$f(\mathbf{r}(t))\Delta s$$

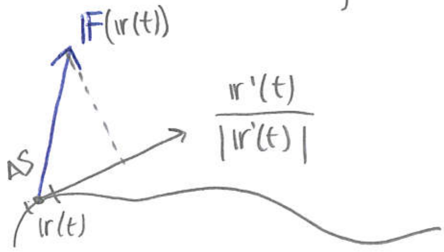


och summerar upp alla dess bidrag över kurvan.

A) Integral av en reellvärd funktion längs en kurva

$$\boxed{\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt}$$

Nu ska vi integrera ett vektorfält $\mathbf{F}$ längs en kurva C. Vi vill bara summera upp komponenten av $\mathbf{F}$ som pekar i samma riktning som partikeln färdas.



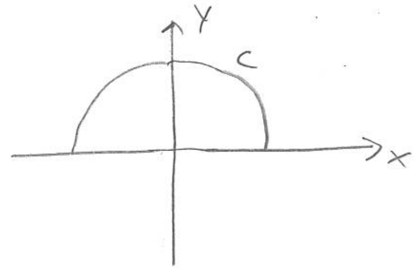
Vi summerar upp $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\Delta s$

B) Integral av ett vektorfälts tangentkomponent längs en kurva

$$\boxed{\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt}$$

Ex) Räkna ut $\int_C y\,ds$ där C är övre halva enhetscirkeln.

(SE BILDER NÄSTA SIDA)



Lösn: Parametrisera C:

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t) \qquad 0 \le t \le \pi$

Räkna ut m.h.a. formel för A:

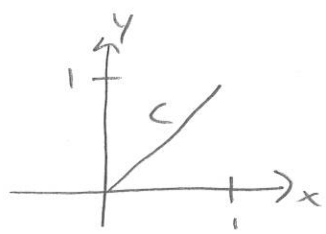
$$\int_C y\,ds = \begin{bmatrix} f(x,y) = y \\ x = \cos t \\ y = \sin t \end{bmatrix} = \int_0^{\pi} \sin t \,|(-\sin t, \cos t)|\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}}\,dt = \int_0^{\pi} \sin t\,dt =$$

$$= \left[-\cos t\right]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = \underline{\underline{2}}$$

Ex) Räkna ut $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = (y^2, 2xy)$ och C är den raka linjen från (0,0) till (1,1).

(SE BILDER NÄSTA SIDA)



Lösn:

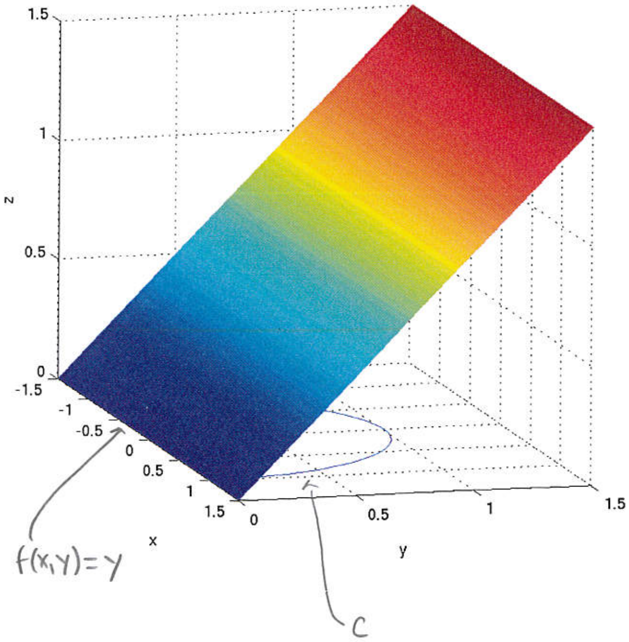
Parametrisera C:

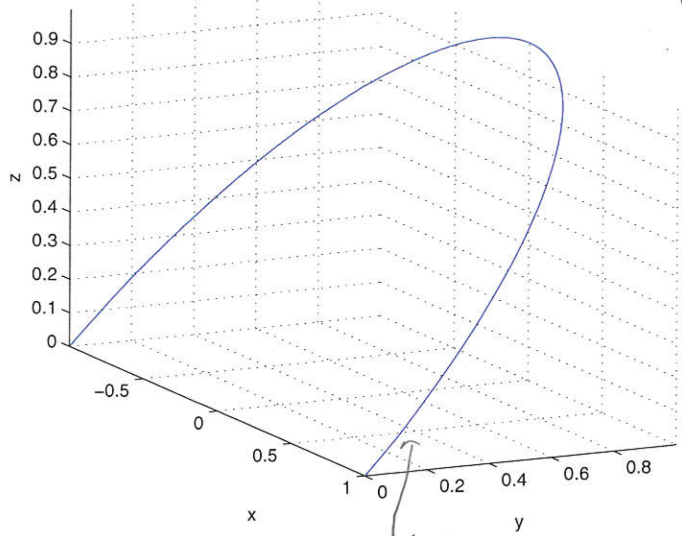
$\mathbf{r}(t) = (t, t) \qquad 0 \le t \le 1$

Räkna ut m.h.a. formel för B:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^1 \mathbf{F}(t,t) \cdot (1,1)\,dt = \int_0^1 (t^2, 2t^2) \cdot (1,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 t^2 + 2t^2\,dt = \left[t^3\right]_0^1 = \underline{\underline{1}}$$





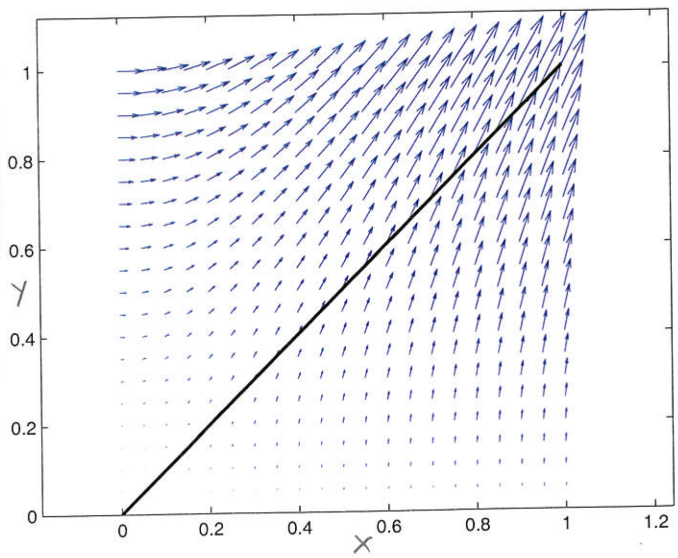
(cost, sint, sint)

= (x, y, f(x,y)) på kurvan

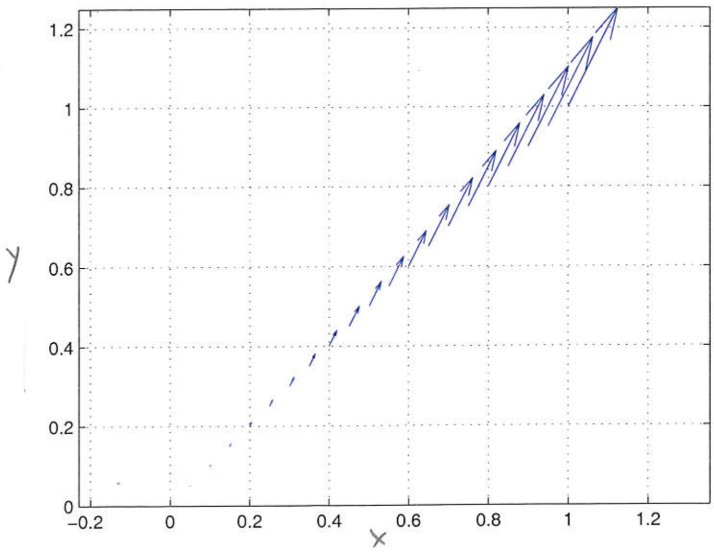
```
[X, Y] = meshgrid(-1.5:0.01:1.5, 0.0:0.01:1.5);
Z = Y;
surf(X, Y, Z)
axis equal
shading interp

t = 0:0.01:pi;
hold on
plot(cos(t), sin(t))
```

```
z = sin(t);
figure
plot3(cos(t), sin(t), z)
axis equal
grid on
```



$\mathbb{F}$ och C



$\mathbb{F}$ på C

```
[X, Y] = meshgrid(0:0.05:1);
U = Y.^2;
V = 2 * X .* Y;
quiver(X, Y, U, V, 2)
axis equal
shading interp

t = 0:0.05:1;
hold on
plot(t, t, 'k', 'linewidth', 2)
```

```
x = t;
y = t;
u = y.^2;
v = 2 * x .* y;

figure
quiver(x, y, u, v)
axis equal
grid on
```

Ytintegraler: C och D

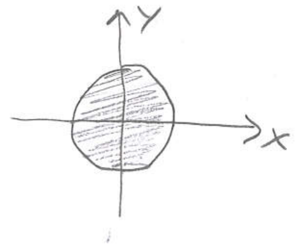
För att lösa C och D parametriserar vi ytan A med två parametrar:

$$\boxed{\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t)) \qquad \begin{cases} a \le s \le b \\ c \le t \le d \end{cases}}$$

Vi minns också:

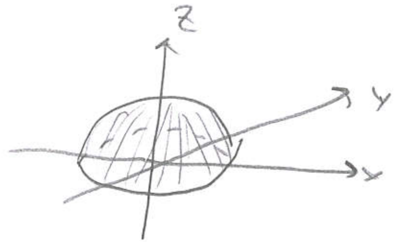
areaelementet $\boxed{dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| ds\,dt}$

Ex) Parametrisera enhetsskivan $x^2+y^2 \le 1$



Polära koordinater: $\begin{cases} \mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

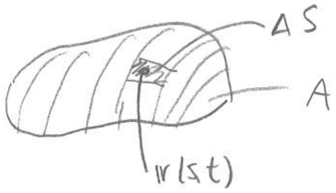
Ex) Parametrisera övre halvan av enhetssfären



Sfäriska koordinater ($R=1$)

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\theta,\phi) = (\cos\theta\sin\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\phi) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

I fall C tänker vi oss att vi tar funktionsvärdet i $\mathbf{r}(s,t)$ gånger ett litet areaelement ΔS



och summerar upp alla $f(\mathbf{r}(s,t))\,\Delta S$ över hela A.

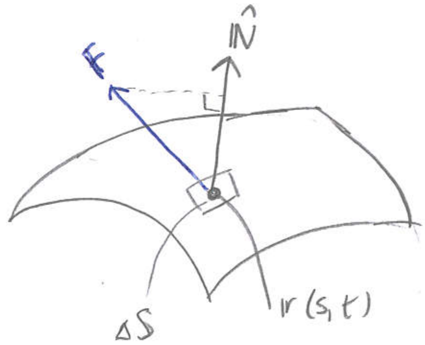
→

C) Integral av en reellvärd funktion över en yta

$$\iint_A f\,dS = \iint f(\mathbf{r}(s,t)) \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right| ds\,dt$$

s och t:s gränser

Nu ska vi integrera ett vektorfält genom en yta.
Vi ska bara summera upp komponenten av $\mathbb{F}$ som går i samma riktning som ytans normal:



$$\hat{\mathbb{N}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right|}$$

Vi summerar upp $\mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\,\Delta S$

D) Integral av ett vektorfälts normalkomponent genom en yta i normalens riktning.

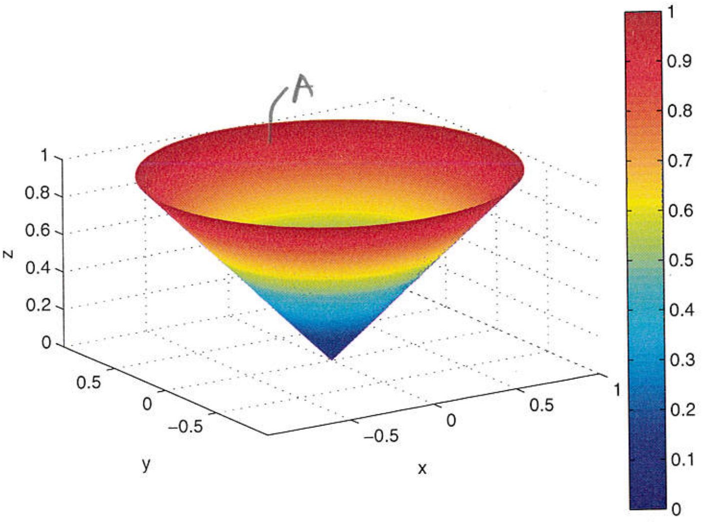
$$\iint_A \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\,dS = \pm \iint \mathbb{F}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) ds\,dt$$

s och t:s gränser

$+$ om $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ pekar i riktningen vi är intresserade av

$-$ om ——〃—— motsatt riktning

Ex Beräkna $\iint_A z\,dS$ över konen $z=\sqrt{x^2+y^2}$ mellan $z=0$ och $z=1$. (8)



$f(x,y,z)=z$

```
[R, T] = meshgrid(0:0.1:1, linspace(0, 2*pi));
X = R .* cos(T);
Y = R .* sin(T);
Z = R;
V = Z;

h = surf(X, Y, Z, V);
axis equal
shading interp
colorbar
```

Lösn:

Parametrisera A:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=r$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ r) \\ 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

Vi ska använda formel C:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}=\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}=(-r\cos\theta,\ -r\sin\theta,\ r\cos^2\theta+r\sin^2\theta)$$

$$=r(-\cos\theta, -\sin\theta, 1)$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right|=r\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta+1^2}=\sqrt{2}\,r$$

$$\iint_A z\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(\mathbf{r}(r,\theta))\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right|dr\,d\theta=\begin{bmatrix} f(x,y,z)=z \\ z=r \end{bmatrix}=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta=$$

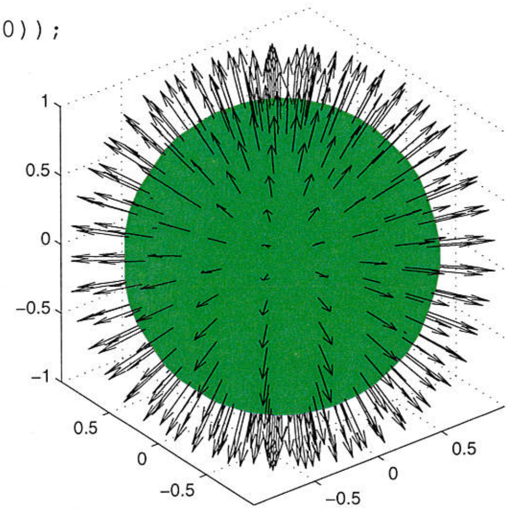
$$=2\pi\sqrt{2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}}}$$

Ex Bestäm flödet av $\mathbb{F} = \dfrac{m}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x, y, z)$ ut genom sfären med radie a.

```
[T, F] = meshgrid(linspace(0, 2 * pi, 20), linspace(0, pi, 20));
a = 1;
X = a * cos(T) .* sin(F);
Y = a * sin(T) .* sin(F);
Z = a * cos(F);

m = 1;
U = m / a^3 * X;
V = m / a^3 * Y;
W = m / a^3 * Z;

surf(X, Y, Z, 'FaceColor', 'g', 'EdgeColor','none');
axis equal
hold on
quiver3(X, Y, Z, U,V, W, 2, 'k')
```



$\mathbb{F}$ på sfären

Lösn:

Parametrisera sfären:

Sfäriska koordinater ($R=a$)

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\theta,\phi) = a(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \pi \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -a\sin\theta\sin\phi & a\cos\theta\sin\phi & 0 \\ a\cos\theta\cos\phi & a\sin\theta\cos\phi & -a\sin\phi \end{vmatrix} = (-a^2\cos\theta\sin^2\phi, -a^2\sin\theta\sin^2\phi, -a^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - a^2\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi)$$

$$= \underline{-a^2\sin\phi(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)}$$

pekar inåt

$$\mathbb{F}(\mathbf{r}(\theta,\phi)) = \frac{m}{a^3} a(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$

kom ihåg: $x^2+y^2+z^2 = R^2$

$$\iint_A \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{m}{a^2}(-a^2\sin\phi)\underbrace{(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)\cdot(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)}_{=1 \text{ (testa)}}\,d\phi\,d\theta$$

$$= m\,2\pi\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} = \underline{\underline{4\pi m}}$$

Notera:

- I A och C spelar det ingen roll vilken parametrisering som används. Resultatet blir det samma.

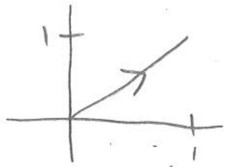
- I B spelar riktningen roll men inte parametriseringen i övrigt.

  Ska exempelvis $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ räknas ut på rakan linjen <u>från</u> (0,0) <u>till</u> (1,1) måste parametriseringen ha rätt riktning, exempelvis funkar både

  $\mathbf{r}(t) = (t,t) \quad 0 \le t \le 1$ →

  och

  $\mathbf{r}(t) = (t^2,t^2) \quad 0 \le t \le 1$ →



  <u>men inte</u>

  $\mathbf{r}(t) = (1-t,1-t) \quad 0 \le t \le 1$ →

- I D spelar normalens riktning roll men inte parametriseringen i övrigt,

  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ ska peka i den riktning flödet ska räknas ut. Gör den inte det sätts minus framför.

Kurvintegral av konservativa fält

Def: en kurva kallas sluten om den saknar ändpunkter.

sluten ej sluten

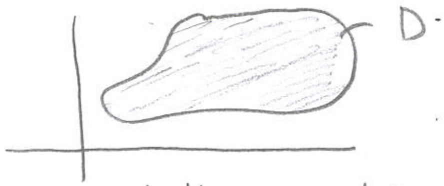
Def: en kurva kallas enkel om den inte korsar sig själv.

ej enkel enkel ej enkel

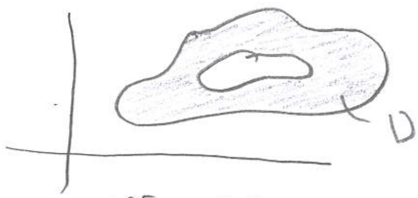
Kom ihåg: sammanhängande mängd D

Def $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas enkelt sammanhängande om varje enkel sluten kurva $c \subseteq D$ kan krympas ihop till en punkt i D utan att lämna D.

Ex $\mathbb{R}^2$

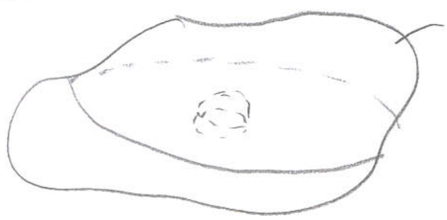


enkelt sammanhängande (e.s.)



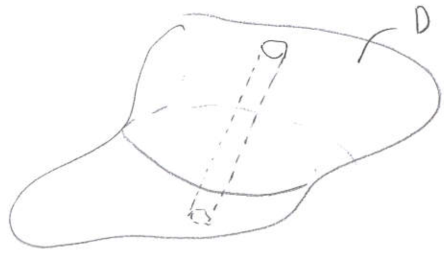
ej e.s.

Ex $\mathbb{R}^3$.



D: en kropp med ett hål i

e.s.



D: en kropp med ett rör igenom

ej e.s.

Fortsättning nästa gång....