Kurvintegral av konservativa fält

Konservativa fält $\mathbb{F}$ $(=\nabla\phi)$ har egenskaper som gör dem enklare att integrera längs en kurva.

SATS - oberoende av vägen

Låt $\mathbb{F}$ vara deriverbar i ett sammanhängande område D. Då är följande påstående ekvivalenta:

(a) $\mathbb{F}$ är konservativt i D

(b) $\oint_c \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ för alla slutna kurvor c i D

(c) $\int_c \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$ har samma värde för alla kurvor som går från $P_0 \in D$ till $P_1 \in D$.

Bevis: Vi visar bara att (a) $\Rightarrow$ (c)

Om (a) gäller vet vi att det finns ett ϕ så att

$$\nabla\phi = \mathbb{F}$$

Låt c vara en kurva från P_0 till P_1.

Dvs: $c: \mathbf{r}(t)\quad a\le t\le b$ med $\mathbf{r}(a)=P_0$ och $\mathbf{r}(b)=P_1$

Vi får:

$$\int_c \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \left[\nabla\phi=\mathbb{F}\right] = \int_a^b \nabla\phi(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt =$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{Kedjeregeln}\\ \text{baklänges}\end{matrix}\right] = \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t))\,dt = \Big[\phi(\mathbf{r}(t))\Big]_a^b = \phi(P_1)-\phi(P_0)$$

Vi har alltså att

$$\int_c \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1)-\phi(P_0)$$

Dvs integralen beror inte på vägen, bara på start- och slutpunkt.

$\boxtimes$

FÖLJDSATS

Om $\mathbb{F}$ $(= \nabla\phi)$ är konservativt och c är en kurva från P_0 till P_1 gäller

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

Nabla-operatorn ∇

Def: ∇ (nabla) definieras som följande deriveringsoperator:

$$\boxed{\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}$$

$\left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right.$ i n variabler$\left.\right)$

Med hjälp av ∇ kan vi definiera tre viktiga operatorer:

Def: gradienten av $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla f \qquad (\text{grad } f)$$

Def: divergensen av $\mathbb{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\nabla \cdot \mathbb{F} \qquad (\text{div } \mathbb{F})$$

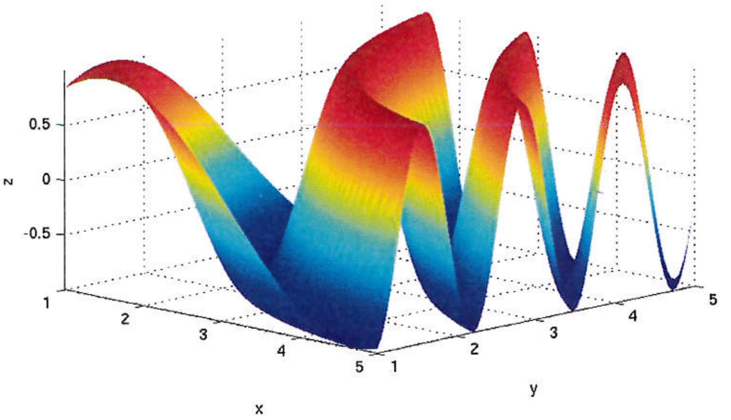
Def: rotationen av $\mathbb{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

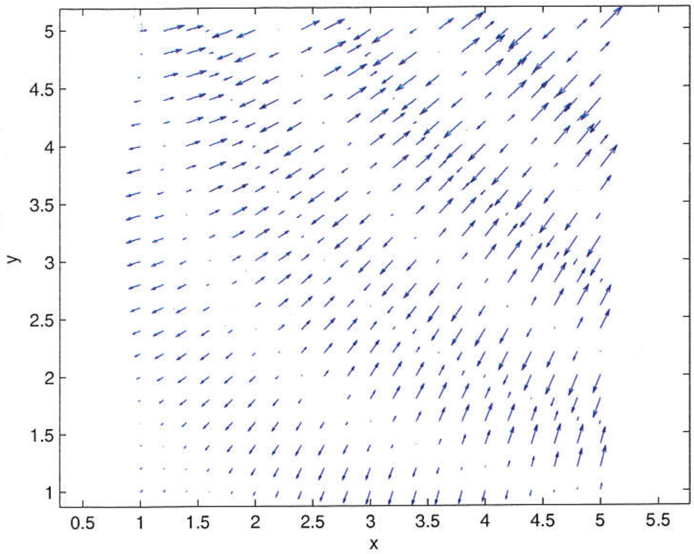
$$\nabla \times \mathbb{F} \qquad (\text{rot } \mathbb{F}, \text{ curl } \mathbb{F})$$

Notera:

- gradienten är på en reellvärd funktion men ger en vektor
- divergensen och rotationen är på vektorvärda funktioner
  * men divergensen ger en reellvärd funktion
  * och rotationen ger en vektorvärd funktion

Ex) Gradienten ∇f av en funktion f ger ett vektorfält som i varje punkt visar i vilken riktning f växer mest.





$f(x,y) = \sin(xy)$

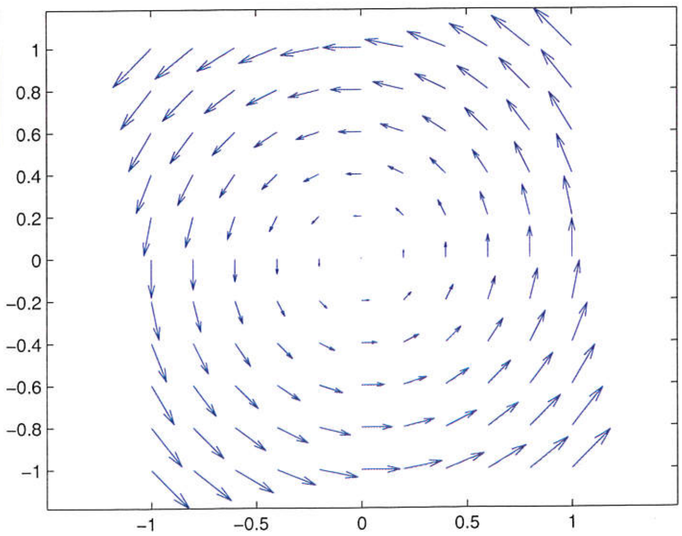
```
[X Y] = meshgrid(1:0.05:5);
Z = sin(X .* Y);

surf(X, Y, Z)
axis equal
shading interp
```

$\nabla f = (y\cos(xy), x\cos(xy))$

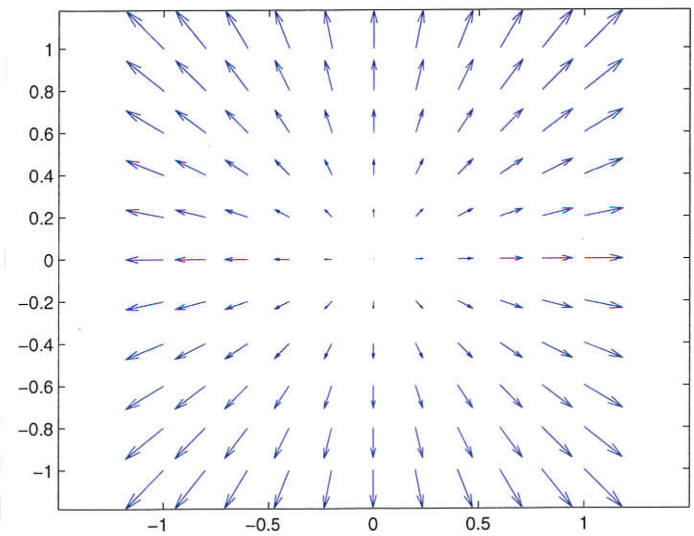
```
[X Y] = meshgrid(1:0.2:5);
U = Y .* cos(X .* Y);
V = X .* cos(X .* Y);

quiver(X, Y, U, V, 1)
axis equal
```

Ex) $\mathbb{v} = (-y, x, 0)$

$\mathbb{F} = (x, y, 0)$



$\mathbb{v}$ $(z=0)$



$\mathbb{F}$ $(z=0)$

```
[X Y] = meshgrid(-1:0.2:1);
U = -Y;
V = X;
quiver(X, Y, U, V, 1)
axis equal
```

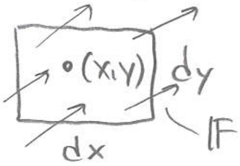
```
[X Y] = meshgrid(-1:0.2:1);
U = X;
V = Y;
quiver(X, Y, U, V, 1)
axis equal
```

$$\rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 \leftarrow \text{divergensfritt}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y = 2$$

Divergensen är ett mått på hur mycket som "skapas" i ett vektorfält.

Tänk en oändligt liten kvadrat runt (x,y):



summan av allt som flödar ut och in i kvadraten är divergensen $\nabla \cdot \mathbb{F}(x,y)$.

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0,0,2)$$

$$\nabla \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = (0,0,0) \longleftarrow \text{rotationsfritt}$$

Rotationen är ett mått på hur mycket ett vektorfält roterar.

Jämför nu resultatet av $\nabla \cdot \mathbf{v}$, $\nabla \cdot \mathbb{F}$, $\nabla \times \mathbf{v}$ och $\nabla \times \mathbb{F}$ med $\mathbf{v}$:s och $\mathbb{F}$:s plotter på förra sidan och försök förstå innebörden.

SATS – Räkneregler

Låt $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Följande gäller

a) $\nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\psi + \phi\nabla\psi$

b) $\nabla\cdot(\phi\mathbb{F}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbb{F} + \phi\nabla\cdot\mathbb{F}$

c) $\nabla\times(\phi\mathbb{F}) = (\nabla\phi)\times\mathbb{F} + \phi\nabla\times\mathbb{F}$

d), e), f) : Adams 16.2 Sats 3

g) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{F}) = 0$

h) $\nabla\times\nabla\phi = 0$ vektor-0, dvs $(0,0,0)$

Bevis av a, b, c, d, g, h

Ex) Bevis av h

$$\nabla\phi = (\phi'_x, \phi'_y, \phi'_z)$$

$$\nabla\times\nabla\phi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi'_x & \phi'_y & \phi'_z \end{vmatrix} = (\phi''_{zy} - \phi''_{yz}, \phi''_{xz} - \phi''_{zx}, \phi''_{yx} - \phi''_{xy}) =$$

$$= [\phi''_{ij} = \phi''_{ji}] = (0,0,0)$$

Ex) Bevis av b)

$$\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

$$\nabla\cdot(\phi\mathbb{F}) = \nabla\cdot(\phi F_1, \phi F_2, \phi F_3) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi F_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi F_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi F_3)$$

$$= \phi'_x F_1 + \phi\frac{\partial}{\partial x}F_1 + \phi'_y F_2 + \phi\frac{\partial}{\partial y}F_2 + \phi'_z F_3 + \phi\frac{\partial}{\partial z}F_3$$

$$= (\phi'_x, \phi'_y, \phi'_z)\cdot(F_1, F_2, F_3) + \phi\left(\frac{\partial}{\partial x}F_1 + \frac{\partial}{\partial y}F_2 + \frac{\partial}{\partial z}F_3\right)$$

$$= (\nabla\phi)\cdot\mathbb{F} + \phi\nabla\cdot\mathbb{F}$$

Notera:

$\mathbb{F}$ konservativt $\Longrightarrow$ $\mathbb{F} = \nabla\phi$ för något ϕ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $\nabla \times \mathbb{F} = \nabla \times \nabla\phi = [\text{satsen}] = 0$ $\Longrightarrow$ $\mathbb{F}$ rotationsfritt

Alltså:

$$\boxed{\mathbb{F} \text{ konservativt} \Longrightarrow \mathbb{F} \text{ rotationsfritt}}$$

(ett resultat vi sett innan)

Gäller $\Longleftarrow$??, bara om....

SATS

$\nabla \times \mathbb{F} = 0$ i D som är enkelt sammanhängande

$\Longrightarrow$

$\mathbb{F}$ konservativt i D.

Ex $\mathbb{F}(x,y) = (2xy, x^2)$

Beräkna $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$ för

a) C: $y = x^2$ från $(0,0)$ till $(1,1)$

b) C: raka linjen från $(0,0)$ till $(1,1)$

a) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2) \quad 0 \le t \le 1$

$\mathbf{r}'(t) = (1, 2t)$

$\mathbb{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbb{F}(t, t^2) = (2t^3, t^2)$

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbb{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^1 (2t^3, t^2) \cdot (1, 2t)\,dt = \int_0^1 2t^3 + 2t^3\,dt$$

$$= \left[t^4\right]_0^1 = 1$$

b) $\mathbf{r}(t) = (t, t) \quad 0 \le t \le 1 \qquad \mathbf{r}'(t) = (1,1) \qquad \mathbb{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbb{F}(t,t) = (2t^2, t^2)$

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbb{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^1 (2t^2, t^2) \cdot (1,1)\,dt = \int_0^1 2t^2 + t^2\,dt =$$

$$= \left[t^3\right]_0^1 = 1$$

Ex) Är $\mathbb{F} = (2xy, x^2)$ konservativt?

$$\nabla \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbb{i}} & \hat{\mathbb{j}} & \hat{\mathbb{k}} \\ D_x & D_y & D_z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2x-2x) = (0,0,0)$$

$\nabla \times \mathbb{F} = 0$ i $\mathbb{R}^3$ som är enkelt sammanhängande

$\Rightarrow$

$\mathbb{F}$ är konservativt.

Ex) Hitta potentialen till $\mathbb{F} = (2xy, x^2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy & \Rightarrow \quad \phi(x,y) = x^2 y + C_1(y) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 & \Rightarrow \quad \phi(x,y) = x^2 y + C_2(x) \end{cases} \Rightarrow \underline{\phi(x,y) = x^2 y + C}$$

Ex) Använd satsen om "oberoende av vägen" för att räkna ut $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ från $(0,0)$ till $(1,1)$.

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \phi(1,1) - \phi(0,0) = 1 + C - (0 + C) = \underline{\underline{1}}$$

<u>Notera:</u>

För att räkna ut $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ om <u>$\mathbb{F}$ är konservativt:</u>

- och C mellan startpunkt och slutpunkt är komplicerad kan en enklare kurva väljas (oberoende av vägen)
- och potentialen är känd räcker det att använda formeln: $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0)$