$\boxed{F17}$ 8/5-18

FEM i flera variabler

För att ta fram den svaga formuleringen används partiell integration (P.I.). I en variabel är formeln

$$\boxed{\int_a^b fg\,dx = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'dx}$$

P.I. i 1 variabel

eller F'

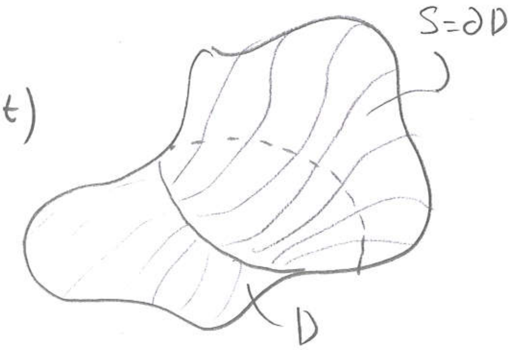
I flera variabler är formeln:

(*) $$\boxed{\iiint_D (\nabla\cdot\mathbb{F})\phi\,dV = \iint_S \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\phi\,dS - \iiint_D \mathbb{F}\cdot\nabla\phi\,dV}$$

P.I. i flera variabler

Här är:

- $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ett tredimensionellt område
- $S = \partial D$ är D:s randyta (tvådimensionellt)
- $\hat{\mathbb{N}}$ är S:s normalvektor
- $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
- $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$



I två variabler skrivs formeln ofta:

$$\iint_D (\nabla\cdot\mathbb{F})\phi\,dA = \int_C \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\phi\,ds - \iint_D \mathbb{F}\cdot\nabla\phi\,dA$$

Vi ska nu visa (*). För att göra det använder vi en mycket viktig sats: <u>Gauss divergenssats</u>

→

SATS Gauss (divergens)sats (utan bevis)

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett område med sluten orienterad randyta S vars ytnormal ut från D är $\hat{\mathbb{N}}$. Låt $\mathbb{F}$ vara deriverbar.

Då gäller:

$$\boxed{\iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV = \iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS}$$

summan av det som skapas och förstörs i D = summan av det som flöder igenom S

(En orienterad yta är en yta med en väldefinierad in- och utsida, och ett väldefinierat normalfält $\hat{\mathbb{N}}$.)

(Jämför med ett möbius-band som inte är orienterad)

Bevis av P.I. (*) (givet Gauss sats)

Vi har $\nabla\cdot(\phi\mathbb{F}) = \nabla\phi\cdot\mathbb{F} + \phi\nabla\cdot\mathbb{F}$ (visa detta)

Vi får nu:

$$\underline{\iint_S \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\phi\,dS} = \iint_S \hat{\mathbb{N}}\cdot(\phi\mathbb{F})\,dS = \left[\begin{array}{c}\text{Gauss}\\ \text{sats}\end{array}\right] = \iiint_D \nabla\cdot(\phi\mathbb{F})\,dV = [\text{relationen}] =$$

$$= \iiint_D \nabla\phi\cdot\mathbb{F} + \phi\nabla\cdot\mathbb{F}\,dV = \left[\begin{array}{c}\text{linjaritet för}\\ \text{integral}\end{array}\right] =$$

$$= \underline{\iiint_D \nabla\phi\cdot\mathbb{F}\,dV + \iiint_D \phi\nabla\cdot\mathbb{F}\,dV}$$

$$\Longrightarrow \iiint_D (\nabla\cdot\mathbb{F})\,\phi\,dV = \iint_S \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\phi\,dS - \iiint_D \nabla\phi\cdot\mathbb{F}\,dV$$

Vi är nu redo för svag formulering i flera variabler.

Vi studerar följande randvärdesproblem (värmeledningsekvationen):

Hitta $u = u(x,y,z)$ så att

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f & \text{i } D \\ aD_{\hat{N}}u + k(u-u_A) = g & \text{på } S \end{cases}$$

Stark form

(Kom ihåg:

$S = \partial D$

$D_{\hat{N}}u = \hat{N}\cdot\nabla u$)

Vi tar fram den svaga formen:

1. $$-\iiint_D \nabla\cdot(a\nabla u)\,v\,dV = \iiint_D f v\,dV$$

Vi har inga Dirichletvillkor så inga extra villkor på v.

2. VL: $$-\iiint_D \nabla\cdot(a\nabla u)v\,dV = [P.I.] = -\iint_S \underbrace{\hat{N}\cdot(a\nabla u)}\,v\,dS + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dV$$

$$= a\hat{N}\cdot\nabla u = aD_{\hat{N}}u = [\text{randvillkoret}] =$$

$$= g - k(u-u_A)$$

$$= -\iint_S (g-k(u-u_A))v\,dS + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dV$$

HL: klart

3. Svag formulering:

Hitta $u = u(x,y,z)$ så att

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dV + \iint_S kuv\,dS = \iiint_D fv\,dV + \iint_S (g+ku_A)v\,dS$$

för alla $v = v(x,y,z)$.

Svag form

Ex) Ta fram den svaga formen av

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } D \\ u = 5 & \text{på } S_1 \\ D_{\hat{N}} u = g & \text{på } S_2 \end{cases} \qquad (\Delta = \nabla\cdot\nabla) \qquad (S = \partial D = S_1 \cup S_2)$$

1. $$-\iiint_D \nabla\cdot\nabla u \, v \, dV = \iiint_D f v \, dV$$

Eftersom vi har Dirichlet på S_1 låter vi $v = 0$ på S_1.

2. VL: $$-\iiint_D \nabla\cdot\nabla u \, v \, dV = [\text{P.I.}] = -\iint_S \hat{\mathbf{N}}\cdot\nabla u \, v \, dS + \iiint_D \nabla u\cdot\nabla v \, dV$$

$$= -\iint_{S_1} \hat{\mathbf{N}}\cdot\nabla u \, \underbrace{v}_{\substack{=0 \\ \text{på } S_1}} \, dS - \iint_{S_2} \underbrace{\hat{\mathbf{N}}\cdot\nabla u}_{= D_{\hat{N}} u = g} \, v \, dS + \iiint_D \nabla u\cdot\nabla v \, dV$$

$$= -\iint_{S_2} g v \, dS + \iiint_D \nabla u\cdot\nabla v \, dV$$

HL: klart

3. Hitta $u = u(x, y, z)$ $\boxed{\text{med } \quad u = 5 \quad \text{på } S_1}$ så att

$$\iiint_D \nabla u\cdot\nabla v \, dV = \iiint_D f v \, dV + \iint_{S_2} g v \, dS$$

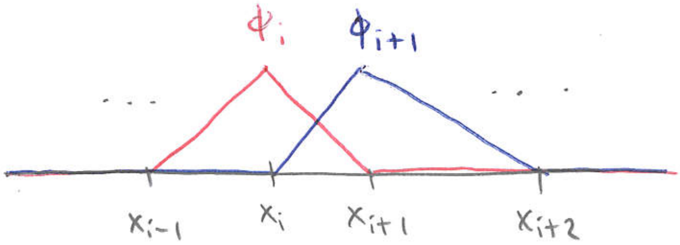
för alla $v = v(x, y, z)$ $\boxed{\text{med } \quad v = 0 \quad \text{på } S_1.}$

FEM-formuleringen i 2 variabler

I en variabel löste vi vår differentialekvation på ett intervall $I=[a,b]$. I FEM-formuleringen gjorde vi följande:

1.) Delade in intervallet i delintervall och punkter:

2.) Definierade hattfunktioner ϕ_i för varje x_i.



(Dessa ϕ_i utgjorde en bas för alla styckvis linjära funktioner på $[a,b]$)

3.) Approximerade lösningen u som en styckvis linjär funktion:

$$u \approx U = \sum_{i=1}^{n} U_i \phi_i(x)$$

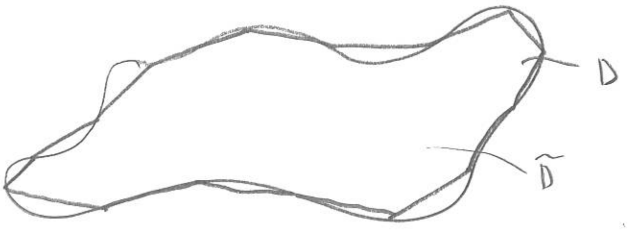
4.) Satte in $U=\sum_{i=1}^{n} U_i \phi_i$ och $v=\phi_j$ $j=1,\dots,n$ i den svaga formen vilket gav matrisekvationen

$$AU=b$$

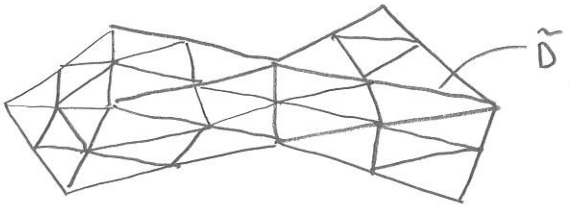
Nu ska vi göra motsvarigheten i 2 variabler.

⟶

1.) Låt vårt område D approximeras av ett polygon $\tilde{D}$, $D \approx \tilde{D}$.



Dela in $\tilde{D}$ i trianglar:



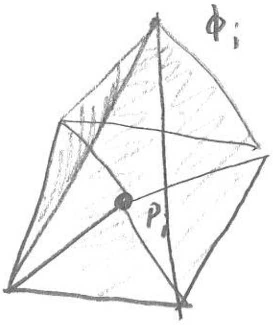
Vi får:

- trianglar
- kanter
- punkter

} kallas triangulering (mesh)

2.) I varje punkt $p_i = (x_i, y_i)$ definieras en hattfunktion $\phi_i(x,y)$ så att

$$\phi_i(p_j) = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$



(Dessa ϕ_i bildar en bas för alla styckvis linjära funktioner på $\tilde{D}$.)

→

3.] Approximera $u(x,y)$ med $U(x,y) = \sum_{i=1}^{n} U_i \phi_i(x,y)$

4.] Säg att vi har svaga formen

$$\begin{cases} \text{Hitta} \; - - - - - \\ \iint_D a \nabla u \cdot \nabla v \, dA = \iint_D f v \, dA \\ \text{för alla} \; - - - - \end{cases}$$

Vi sätter in $u \approx U = \sum_{i=1}^{n} U_i \phi_i$ och $v = \phi_j$ $j = 1, \ldots, n$

och får:

$$\text{VL:} \iint_D a \nabla U \cdot \nabla \phi_j \, dA = \iint_D a \nabla \left(\sum_{i=1}^{n} U_i \phi_i \right) \cdot \nabla \phi_j \, dA = \left[\begin{array}{l} \text{linjäritet} \\ \text{för derivata och} \\ \text{integral} \end{array} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} U_i \iint_D a \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dA$$

$$\text{HL:} \iint_D f \phi_j \, dA$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} U_i \underbrace{\iint_D a \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dA}_{= a_{ji}} = \underbrace{\iint_D f \phi_j \, dA}_{= b_j} \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} U_i a_{ji} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \boxed{A \mathcal{U} = b}$$

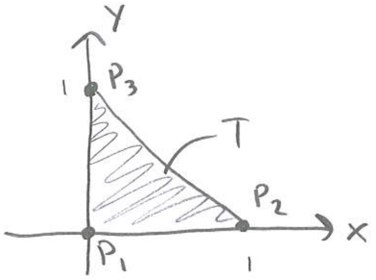
där

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

↑ Styvhetsmatris

↑ lastvektor

Ex] Vi studerar en triangel T:



a) Bestäm ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3

Generell form för ϕ_i på T är: $\boxed{\phi_i(x,y) = a + bx + cy}$

ϕ_1:

Vi vet:

$$\left.\begin{cases} 1 = \phi_1(P_1) = \phi_1(0,0) = a \\ 0 = \phi_1(P_2) = \phi_1(1,0) = a+b \\ 0 = \phi_1(P_3) = \phi_1(0,1) = a+c \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\phi_1(x,y) = 1 - x - y}$$

ϕ_2:

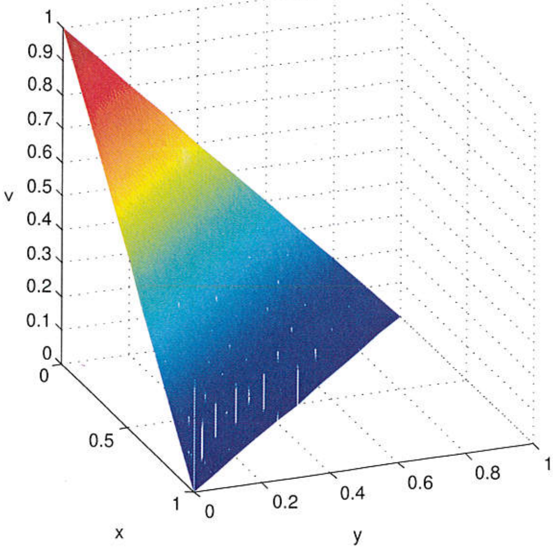
$$\left.\begin{cases} 0 = \phi_2(P_1) = \phi_2(0,0) = a \\ 1 = \phi_2(P_2) = \phi_2(1,0) = a+b \\ 0 = \phi_2(P_3) = \phi_2(0,1) = a+c \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\phi_2(x,y) = x}$$

ϕ_3:

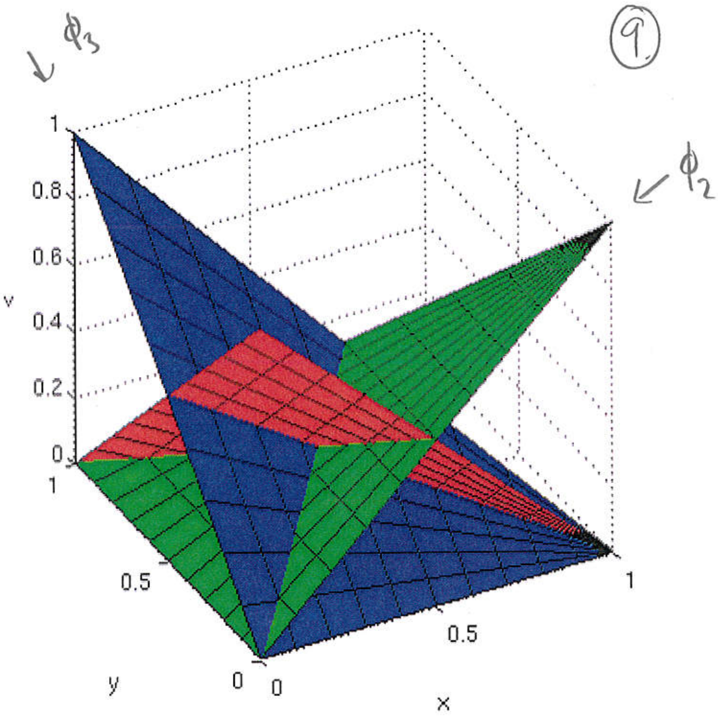
$$\left.\begin{cases} 0 = \phi_3(P_1) = \phi_3(0,0) = a \\ 0 = \phi_3(P_2) = \phi_3(1,0) = a+b \\ 1 = \phi_3(P_3) = \phi_3(0,1) = a+c \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\phi_3(x,y) = y}$$



$\phi_1(x,y)$ på T

```
[X, Y] = meshgrid(0:0.1:1);
Y = Y .* (1 - X);
Z = 1 - X - Y;
surf(X, Y, Z)
axis equal
shading interp
```



ϕ_1, ϕ_2 och ϕ_3 på T

```
[X, Y] = meshgrid(0:0.1:1);
Y = Y .* (1 - X);
surf(X, Y, 1 - X - Y, 'facecolor', 'r')
hold on
surf(X, Y, X, 'facecolor', 'g')
surf(X, Y, Y, 'facecolor', 'b')
axis equal
```

b) Räkna ut $\nabla \phi_i$ $i=1,2,3$

$$\nabla\phi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \nabla\phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla\phi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Räkna ut $a_{ij} = \iint_T \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j \, dA$ (motsvarar $a(x,y)=1$)

$$a_{11} = \iint_T \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_1 \, dA = \iint_T \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} dA = 2 \iint_T dA = 2\,\frac{1}{2} = 1$$

$$a_{12} = \iint_T \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2 \, dA = \iint_T \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dA = \;\ldots\ldots\; = -\frac{1}{2} \quad (= a_{21} = a_{13} = a_{31})$$

$$a_{22} = \iint_T \nabla\phi_2 \cdot \nabla\phi_2 \, dA = \frac{1}{2} \quad (= a_{33})$$

$$a_{23} = \iint_T \nabla\phi_2 \cdot \nabla\phi_3 \, dA = 0 = A_{32}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$