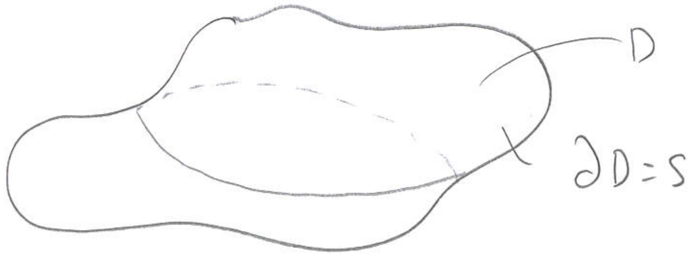
F18 14/5 - 18

De flesta fysiska fenomen kan beskrivas med differentialekvationer (ODE / PDE). Dessa DE:er är inte tagna ur luften, utan är härledda från än mer grundläggande lagar/principer. Ett viktigt verktyg för dessa härledningar är flervariabelanalys.

Nu ska vi härleda DE:en för värmeledning.

Härledning av värmeledningsekvationen

Vi studerar tidsoberoende (se steady-state på wiki) värmeledning i en kropp $D \subseteq \mathbb{R}^3$ med randyta $S \subseteq \mathbb{R}^3$.



Beteckna:

- $\mathbb{F}(x,y,z)$ – värmeflödestätheten $[J/m^2 s]$
- $f(x,y,z)$ – källtäthet för inre värmekällor $[J/m^3 s]$

Vi betraktar en godtycklig delvolym $D_0 \subseteq D$ och betecknar dess randyta S_0. (Detta är ett mycket vanligt tillvägagångssätt vid härledning av DE:er)

Vi studerar två integraler:

- $\iint_{S_0} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} \, dS$ ← värmeflödet ut genom S_0
- $\iiint_{D_0} f \, dV$ ← värmeproduktionen inuti D_0

Vi använder följande grundläggande princip (konserveringslag):

Energiprincipen (termodynamikens första huvudsats)

(se Wiki. för mer info)

I detta fallet säger denna princip:

> Summan av det som flödar igenom S_0 är lika med det som skapas inuti D_0.

D.v.s:

$$\iint_{S_0} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iiint_{D_0} f\, dV$$

Vi använder Gauss sats på VL:et (vi vill få en volymintegral istället för ytintegral). Gauss sats ger:

$$\iint_{S_0} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = [\text{Gauss}] = \iiint_{D_0} \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV$$

Vi får alltså:

$$\iiint_{D_0} \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \iiint_{D_0} f\, dV$$

$\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\iiint_{D_0} (\nabla \cdot \mathbb{F} - f)\, dV = 0} \qquad (*)$$

$\longrightarrow$

Vi ska nu skriva om (*) som är en s.k. integralekvation, till en differentialekvation. Det gör vi med hjälp av följande resonemang:

Eftersom (*) gäller för alla val av $D_0 \subset D$ betyder det att integranden $(\nabla \cdot \mathbb{F} - f)$ måste vara 0. Dvs.:

$$\nabla \cdot \mathbb{F} - f = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbb{F} = f} \qquad (**)$$

$$\iiint_{D_0} v \, dV = 0 \quad \forall D_0 \implies v = 0$$

Bevis: (motsägelse) antag att $v(\hat{p}) > 0$ (<0 funkar liknande). Då går det att välja D_0 som en omgivning till $\hat{p}$ där $v(p) > 0 \ \forall p \in D_0$. Men då måste $\iiint_{D_0} v \, dV > 0$ vilket motsäger antagandet $\Rightarrow v = 0$.

I nästa steg ska vi använda en så kallad konstitutiv lag (se constitutive equation wiki) för att gå vidare med (**). Vi använder

$$\boxed{\text{Fouriers lag:} \quad \mathbb{F} = -a \nabla u}$$

där

- $a(x,y,z)$ – värmeledningskoefficienten $[J/mKs]$
- $u(x,y,z)$ – temperaturen $[K]$

$\longrightarrow$

Fouriers lag i ord:

Värmeflödes tätheten $\mathbb{F}$ (värmeflödet) är proportionell mot temperaturgradienten ∇u (temperaturskillnaden) och flödet blir större ju större värmelednings-koefficient. Värme flödar från varmt till kallt.

Vi får nu om vi stoppar in Fouriers lag i (**):

$$\boxed{-\nabla \cdot (a \nabla u) = f}$$

vilket är värmeledningsekvationen.

Randvillkor för värmeledningsekvationen

För att kunna lösa värmeledningsekvationen behövs randvillkor. Randvillkoret vi använder baseras på följande relation:

$$\underbrace{\mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}}_{\substack{\text{Värmeflödet}\\ \text{ut genom}\\ \text{randen}}} = \underbrace{k(u - u_A)}_{\substack{\text{temperaturskillnaden}\\ \text{mellan yttre och}\\ \text{inre temperatur}\\ \text{gånger värmeöver-}\\ \text{föringskoefficienten}}} - \underbrace{g}_{\substack{\text{inåtriktad värmekälla}\\ \text{på randen}}} \quad \text{på } S$$

- $k(x,y,z)$ – värmeöverföringskoefficient för det isolerade ytskiktet $[J/m^2 s K]$
- $u_A(x,y,z)$ – omgivningens temperatur $[K]$
- $g(x,y,z)$ – flödestäthet för värmekällor på randen $[J/m^2 s]$

Vi använder Fouriers lag på VL:et:

$$\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}} = [\text{Fourier}] = -a\underbrace{\nabla u\cdot\hat{\mathbb{N}}}_{= D_{\hat{N}}u} = -a\underbrace{D_{\hat{N}}u}$$

riktningsderivatan av u i $\hat{\mathbb{N}}$:s riktning

Detta ger oss efter omskrivning det allmänna randvillkoret för värmeledningsekvationen:

$$\boxed{a D_{\hat{N}} u + k(u-u_A) = g \quad \text{på } S}$$

Detta randvillkor är av typen <u>Robin</u>.

Fallet <u>$k=0$</u> motsvarar <u>perfekt isolerad</u> gränsyta. Vi får:

$$\boxed{a D_{\hat{N}} u = g \quad \text{på } S}$$

vilket är ett randvillkor av typen <u>Neumann</u>.

Delar vi med k och låter <u>$k\longrightarrow\infty$</u> får vi

$$\boxed{u = u_A \quad \text{på } S}$$

vilket motsvarar <u>helt oisolerad</u> gränsyta. Detta är ett randvillkor av typen <u>Dirichlet</u>.

Sammanfattningsvis har vi <u>värmeledningsproblemet</u> på stark form.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Hitta } u=u(x,y,z) \text{ så att}\\ \begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f & \text{i } D\\ a D_{\hat{N}} u + k(u-u_A) = g & \text{på } S\end{cases}\end{array}}$$

Gauss sats / Divergenssatsen

Nu ska vi skriva upp Gauss sats igen men vara nogrannare med vad som ska gälla.

SATS Gauss sats (Divergenssatsen)

Givet:

- $D \subseteq \mathbb{R}^3$ begränsad
- $S = \partial D$ är en styckvis glatt orienterad sluten yta
- $\hat{\mathbb{N}}$ är S:s utåtriktade enhetsnormalvektorfält
- $\mathbb{F}$ är ett glatt vektorfält

Då gäller

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbb{F} \, dV = \iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} \, dS$$

Vad innebär glatt? (smooth)

- Glatt $\mathbb{F}$ innebär att $\nabla \cdot \mathbb{F}$ ska vara kontinuerlig så att

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbb{F} \, dV \text{ existerar.}$$

- Glatt S innebär att tangenterna $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ är kontinuerliga så att $\hat{\mathbb{N}} = \pm \dfrac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}$ existerar

Orienterad?

Orienterad är en yta som har ett entydigt normalfält $\hat{\mathbb{N}}$, d.v.s. en väldefinierad in- och utsida.
(Jämför med Möbiusbandet som inte är orienterad)

Styckvis glatt orienterad yta?

En yta ihopskarvad av glatta orienterade ytor så att orienteringarna passar ihop i skarvarna kallas styckvis glatt orienterad.

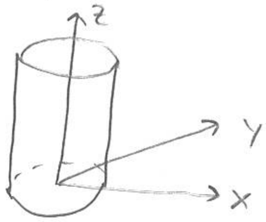
Gauss sats är användbar för att förenkla uträkningen av integraler.

Ex

Låt $\mathbb{F}(x,y,z) = (bxy^2,\ bx^2y,\ (x^2+y^2)z^2)$ och låt S vara ytan till cylindern $x^2+y^2 \le a^2$, $0 \le z \le b$.

Beräkna $\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS$.

Lösn



Vi kan använda formeln $\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint \mathbb{F}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) ds\,dt$

men då måste vi parametrisera 3 ytor (botten, toppen och manteln)

Dessutom blir troligtvis integralerna svåra.

Istället använder vi Gauss sats:

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = [\text{Gauss}] = \iiint_D \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \iiint_D \frac{\partial}{\partial x}(bxy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(bx^2y) + \frac{\partial}{\partial z}((x^2+y^2)z^2)\, dV$$

$$= \iiint_D (x^2+y^2)(b+2z)\, dV = \begin{bmatrix} \text{cylindriska} \\ \text{koordinater} \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \\ dV = r\,dr\,d\theta\,dz \end{bmatrix} = \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 (b+2z)\, r\,dr\,d\theta\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b (b+2z)\,dz \int_0^a r^3\,dr = 2\pi \left[bz + z^2\right]_0^b \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \underline{\underline{\pi a^4 b^2}}$$

Ex) Beräkna $\iint_S x^2+y^2\,dS$ där $S: x^2+y^2+z^2=a^2$

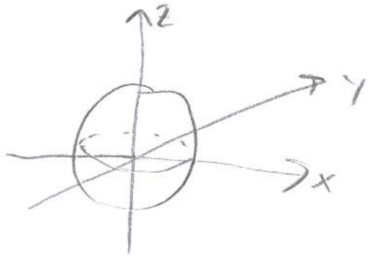
Lösn:

Jämför med Gauss sats: $\iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV = \iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS$

Vi har en ytintegral $\left(\iint_S x^2+y^2\,dS\right)$ men inte ett givet vektorfält $\mathbb{F}$.

Vi vet dock $\hat{\mathbb{N}}$ på vår yta S:

$$\hat{\mathbb{N}} = \frac{1}{a}(x,y,z) \quad \leftarrow \text{(varför?)}$$



Så om vi kan bestämma ett $\mathbb{F}$ så att

$$\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}} = x^2+y^2$$

kan vi använda Gauss sats.

$$\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}} = (\ldots,\ldots,\ldots)\cdot\frac{1}{a}(x,y,z) = x^2+y^2$$

välj till ax välj till ay välj till 0

$\mathbb{F}=(ax,ay,0)$ ger $\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}} = x^2+y^2$

Så vi får:

$$\iint_S x^2+y^2\,dS = \iint_S (ax,ay,0)\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = \left[\text{Gauss}\right] = \iiint_D \nabla\cdot(ax,ay,0)\,dV$$

$$= \iiint_D 2a\,dV = 2a\underbrace{\iiint_D dV}_{\text{volymen av ett klot med radie } a} = \left[\begin{array}{l}\text{Sfäriska koordinater}\\ dV = R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta\end{array}\right]$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} R^2\sin\theta\,dR\,d\phi\,d\theta = \ldots = \frac{8\pi a^4}{3}$$