MVE255

$\boxed{F19}$ 15/5 - 18

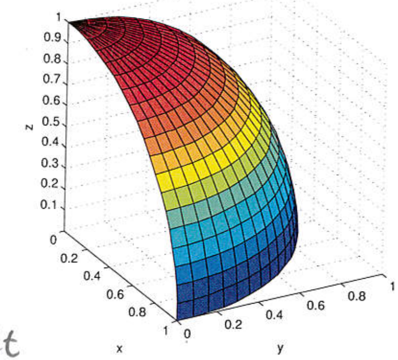
Ex 16.4.12

Beräkna flödet av $\mathbb{F}(x,y,z) = (y+xz,\ y+yz,\ -2x-z^2)$ upp genom den del av $x^2+y^2+z^2=a^2$ som ligger i första oktanten.

notera →

```
[T F] = meshgrid(linspace(0, pi/2, 20));
a = 1;
X = a * cos(T) .* sin(F);
Y = a * sin(T) .* sin(F);
Z = a * cos(F);

surf(X, Y, Z)
axis equal
```



Lösn:

Vi ska räkna ut

$$\iint_{\rho} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS$$

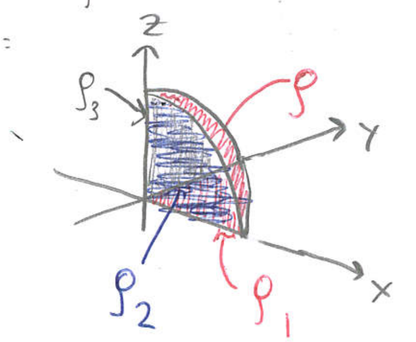
där ρ är den beskrivna ytan.

Används formeln $\iint_{\rho} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint \mathbb{F}(\mathbb{r}(s,t)) \cdot \left| \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial t} \right| ds\,dt$

kommer vi få en väldigt svårlöst integral.

Vi ska därför använda Gauss sats istället. Men för att använda Gauss sats $\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV$ krävs det att S omsluter ett område D. Det gör inte vår yta ρ.

Men lägger vi till tre fjärdedelscirklar så att vi får ett åttondelsklot, alltså:



så har vi en yta $S = \rho \cup \rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_3$ som omsluter ett område D.

→

Gauss sats blir nu:

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV = [\text{Gauss}] = \iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = [S=\rho\cup\rho_1\cup\rho_2\cup\rho_3] =$$

$$= \iint_\rho \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS + \iint_{\rho_1}\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS + \iint_{\rho_2}\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS + \iint_{\rho_3}\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS$$

Vi har alltså:

$$\underset{(i)}{\iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV} = \underbrace{\iint_\rho \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS}_{\text{den sökta men svåra integralen}} + \underset{(ii)}{\iint_{\rho_1}\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS} + \underset{(iii)}{\iint_{\rho_2}\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS} + \underset{(iv)}{\iint_{\rho_3}\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS}$$

Vi räknar ut de andra fyra integralerna och löser ut den sökta.

(i)

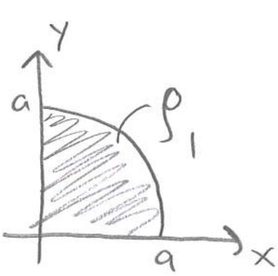
$$\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y+xz) + \frac{\partial}{\partial y}(y+yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-2x-z^2) = z+1+z-2z = \underline{\underline{1}}$$

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV = \underbrace{\iiint_D dV}_{\text{volymen av ett åttondelsklot med radie } a} = \begin{bmatrix}\text{sfäriska}\\ \text{koordinater}\end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{R^3}{3}\right]_0^a = \underline{\frac{\pi a^3}{6}}$$

(ii)

Vi använder formeln $\iint_{\rho_1}\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = \overset{\text{beror på normalens riktning}}{\pm}\iint \mathbb{F}(\mathbb{r}(s,t))\cdot\left(\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial t}\right)ds\,dt$

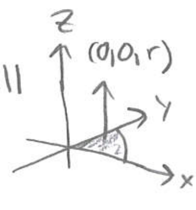


Parametrisering av ρ_1: $\mathbb{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ $\begin{cases}0\le r\le a\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}(r,\theta)) = \mathbb{F}(\underset{x}{r\cos\theta}, \underset{y}{r\sin\theta}, \underset{z}{0}) = (r\sin\theta, r\sin\theta, -2r\cos\theta)$$

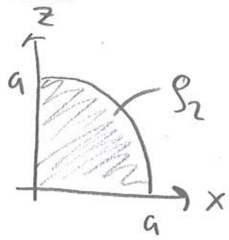
$$\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\theta} = \begin{vmatrix}\mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k}\\ \cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix} = (0,0,r)$$

← Pekar åt fel håll ⇒ sätt − framför i formeln



$$\Rightarrow \underline{\iint_{\rho_1}\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a 0\cdot r\sin\theta + 0\cdot r\sin\theta + r\cdot(-2r\cos\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a 2r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \underline{\frac{2a^3}{3}}$$

(iii)



$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, 0, r\sin\theta) \quad 0 \le r \le a, \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Det är smartare att räkna ut $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$ före $\mathbb{F}(\mathbf{r}(r,\theta))$:

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ -r\sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = (0, -r, 0)$$

Pekar åt rätt håll $\Rightarrow$ + framför i formeln

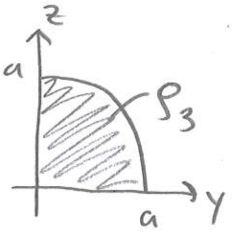
$$\mathbb{F}(\mathbf{r}(r,\theta)) = \mathbb{F}(r\cos\theta, 0, r\sin\theta) = (\ldots, 0, \ldots)$$

behöver vi inte räkna ut p.g.a

Vi får nu:

$$\iint_{S_2} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = +\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a 0\cdot(-r)\,dr\,d\theta = 0$$

(iv)



$\mathbf{r}(r,\theta) = (0, r\cos\theta, r\sin\theta) \quad 0 \le r \le a, \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = (r, 0, 0)$$

Pekar åt fel håll $\Rightarrow$ − framför i formeln

$$\mathbb{F}(\mathbf{r}(r,\theta)) = \mathbb{F}(0, r\cos\theta, r\sin\theta) = (r\cos\theta, \ldots, \ldots)$$

behöver vi inte räkna ut p.g.a.

Vi får:

$$\iint_{S_3} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r\cos\theta\cdot r + 0 + 0\,dr\,d\theta = -\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a = -\frac{a^3}{3}$$

Nu har vi allt vi behöver:

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV = \iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS + \iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS + \iint_{S_2} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS + \iint_{S_3} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS$$

$$\frac{\pi a^3}{6} = \iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS + \frac{2a^3}{3} + 0 + \frac{-a^3}{3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = \frac{a^3}{6}(\pi - 2)}$$

SATS - Varianter av Gauss sats

$$\iiint_D \nabla \times \mathbb{F}\, dV = \iint_S \hat{\mathbb{N}} \times \mathbb{F}\, dS$$

$$\iiint_D \nabla \phi\, dV = \iint_S \phi\, \hat{\mathbb{N}}\, dS$$

SATS - Gauss sats i planet

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbb{F}\, dA = \underbrace{\int_C \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, ds}_{= \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}}$$

Vi har använt Gauss sats till:

- Förenkla uträkningar av integraler
- Härleda värmeledningsekvationen
- Härleda P.I. i flera variabler

SATS - Stokes sats

Låt A vara en styckvis glatt orienterad yta med ytnormal $\hat{\mathbb{N}}$ och vars rand är kurvan C. Följande gäller

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \iint_A (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS$$

Repetition: Jacobi i Matlab

Givet: $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix} m \text{ variabler} \\ n \text{ komponenter} \end{pmatrix}$

Jacobimatrisen för f betecknas Df eller f' och definieras

$$f' = Df = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} & n \\ m & \end{array}$$

Kom ihåg: variabler $\longleftrightarrow$

komponenter $\updownarrow$

Vi ska räkna ut f' numeriskt i Matlab.

Vi använder approximationen (centraldifferens)

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{f_i(x + he_j) - f(x - he_j)}{2h}$$

där $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$, $e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ j:te platsen   och vi låter $h = 1e-5$ i Matlab

Vi ska skriva en funktion som räknar ut $Df = f'$

A = jacobi(f,x)

- f funktions-"handle"
- x vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ står upp
- f är sån att $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$ står upp

```
function A = jacobi(f,x)
  m = length(x);
  n = length(f(x));
  A = zeros(n,m);

  for j=1:m
     ej = zeros(m,1);
     ej(j)= 1e-5;
     A(:,j)= (f(x+ej)-f(x-ej))/2e-5;
  end
end
```

Ex) Räkna ut Df av $f(x,y) = (\sin x, \sin y)$ i punkten (1,2) m.h.a. jacobi.m.

Lösn:

viktig

```
funk=@(x) [sin(x(1)) ; sin(x(2))];
A=jacobi(funk, [1 ; 2]);
```

Ex) Hur räknas Hessianen av en funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ut m.h.a jacobi.m?

Vi har
$$Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Tar vi Df får vi: $Df = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \; \cdots \; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$

Skickar vi sen in $(Df)^T$ i jacobi får vi Hessianen.

måste stå upp

Dvs:

viktigt

```
DfT = @(x) jacobi(f,x)';
Hf = @(x) jacobi(DfT,x);
```