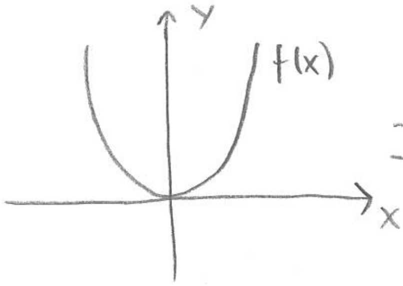
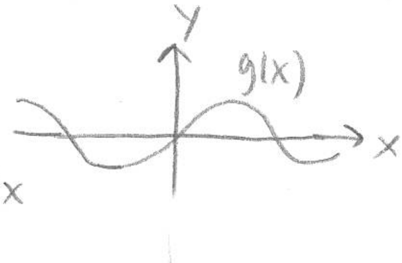
F1 19/3-18 Intro: flervariabelanalys

• Funktion i en variabel (tidigare kurser)

$f(x) = x^2 \quad (f: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

$g(x) = \sin x \quad (g: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$



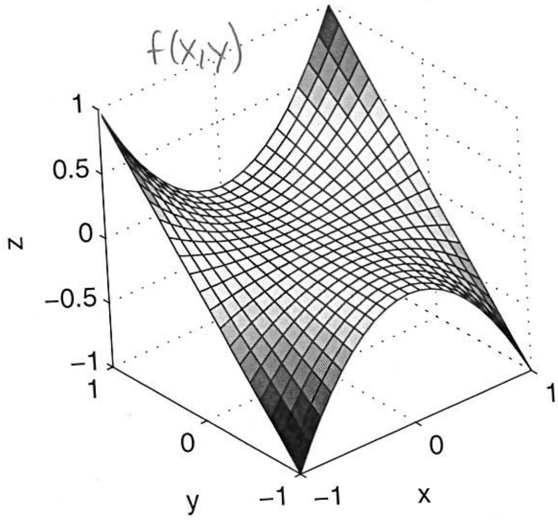


• Funktion i flera variabler

$f(x,y) = x^2 y \quad (f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

$h(x,y,z) = xyz + z + \sin y$

$(h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$




```
[X,Y]=meshgrid(-1:0.1:1);
surf(X,Y,X.^2.*Y)
axis equal
```

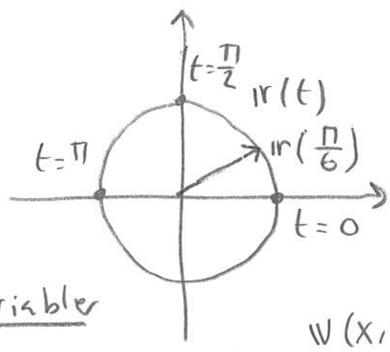
• Vektorvärd funktion i en variabel

$f(x) = \left(x^2, \frac{x}{2}\right) \quad (f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2)$

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t) \quad (\mathbf{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2)$

(Ofta skrivs vektorer fetstil)

kan ses som en vektor eller en punkt



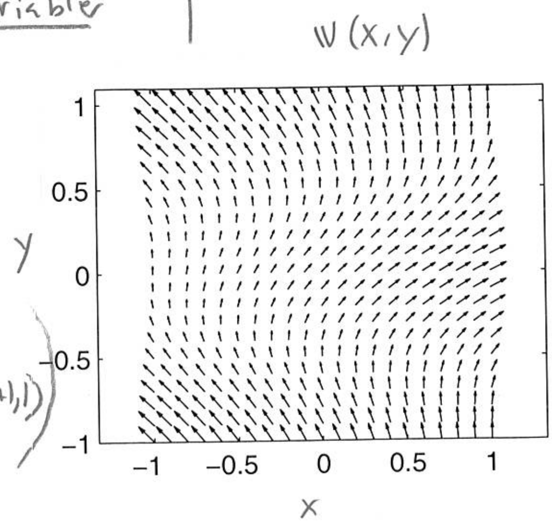
• Vektorvärd funktion i flera variabler

$f(x,y) = (y, x^2 y) \quad (f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$

$\mathbf{v}(x,y) = (\cos(\pi y) + x, y^2 + 1)$

$(\mathbf{v}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$

```
[X,Y]=meshgrid(-1:0.1:1);
quiver(X,Y,cos(pi*Y)+X,Y.^2+1,1)
axis equa
```



Allmänt

$\mathbb{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

m - antalet variabler

n - antalet komponenter hos funktionsvärdet

(om $n > 1$ kallas $\mathbb{f}$ vektorvärd funktion)

$$\mathbb{f}(\mathbb{x}) = (f_1(\mathbb{x}), f_2(\mathbb{x}), \ldots, f_n(\mathbb{x}))$$

där

$$\mathbb{x} = (x_1, \ldots, x_m)$$

notera

Ex: $\mathbb{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{f}(x,y,z) = (f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z))$

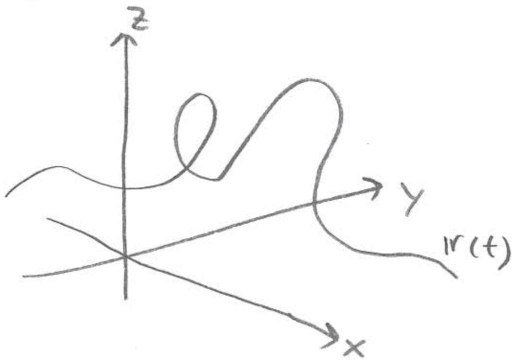
I den här kursen ska vi analysera funktioner $\mathbb{f}$:

- derivera
- integrera
- gränsvärden
- optimera
- nollställen
- visualisera
- FEM (Finita Elementmetoden)

Vektorvärda funktioner av en variabel (kurvor)

$\mathbb{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \leftarrow$ (behöver inte vara 3)

$\boxed{\mathbb{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))}$ position



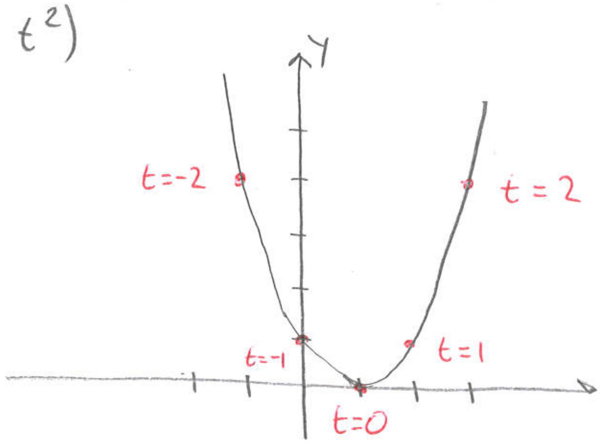
Tänk t som tiden och $\mathbb{r}(t)$ som en partikels position vid tiden t.

x-, y-, och z-komponenterna är funktioner av t.

Ex: $\mathbb{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{r}(t) = (t+1,\ t^2)$

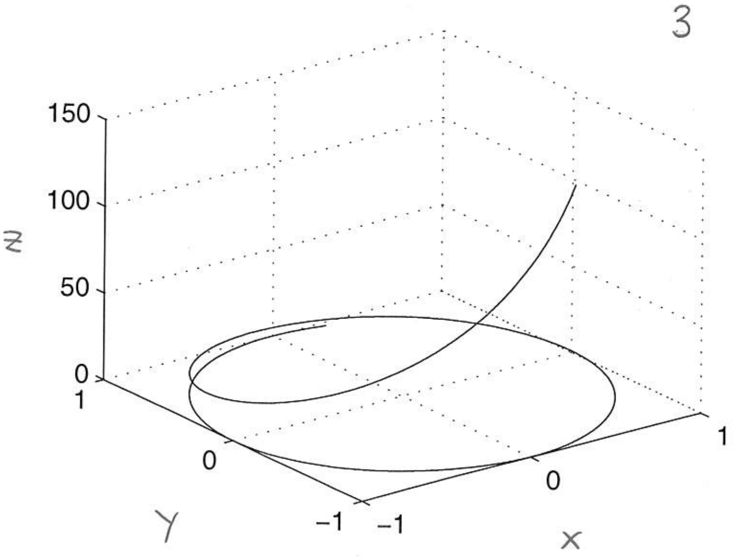
$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2 \end{cases}$$

```
t=-2:0.01:2;
plot(t+1, t.^2)
```



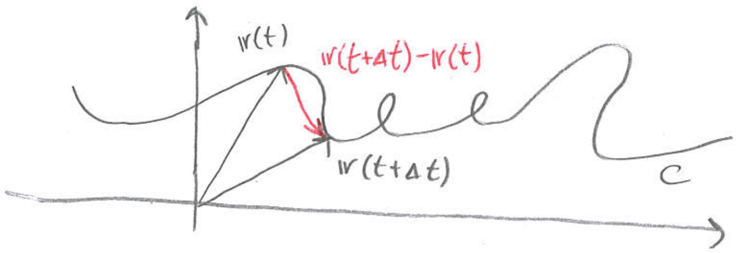
Ex) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$

```
t=-5:0.01:5;
plot3(cos(t),sin(t),exp(t))
grid on
```



$\mathbf{r}(t)$ beskriver alltså en kurva. En kurva betecknas of C.

Utgå från en kurva C beskriven av $\mathbf{r}(t)$



Vid tidpunkter t och $t+\Delta t$ har vi

$$\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t} \longleftarrow \text{medelhastigheten}$$

Låt nu $\Delta t \to 0$. Om gränsvärdet existerar säger vi att $\mathbf{r}(t)$ är deriverbar (i t) och skriver:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}(t)}_{\text{vanlig beteckning inom fysik}}$$

Vi har nu fått partikelns hastighet:

$\boxed{\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)}$ hastighet (velocity)

Notera att $\mathbf{v}(t)$ är en vektor, dess längd kallas fart:

$\boxed{v(t) = |\mathbf{v}(t)|}$ fart (speed)

- Hastighet $\mathbf{v}(t)$: både riktning och hur fort det går.
- Fart $v(t)$: bara hur fort det går.

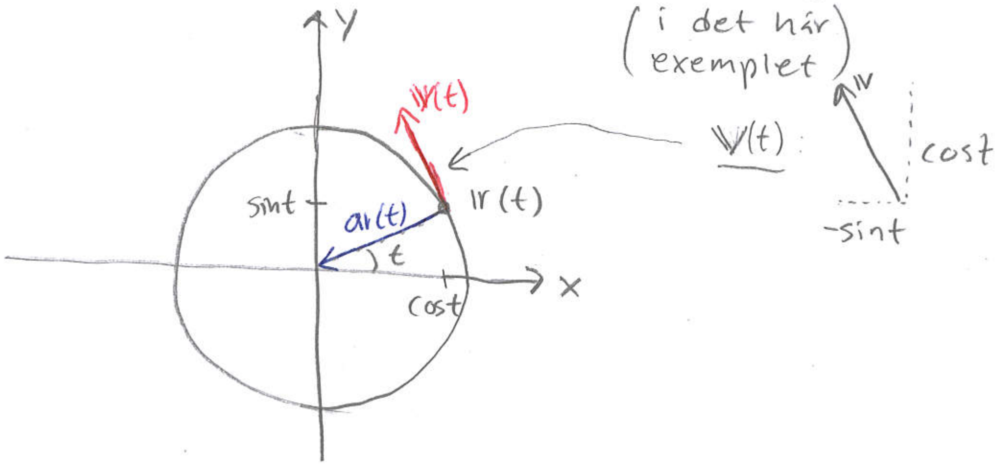
Derivera igen och vi får:

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{v}'(t)} \quad \text{acceleration}$$

Ex $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

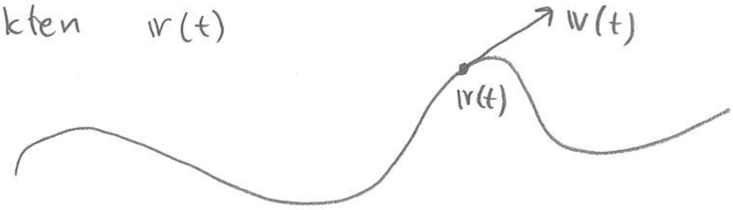
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = ((\cos t)', (\sin t)') = (-\sin t, \cos t)$

$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (-\cos t, -\sin t) = \underbrace{-\mathbf{r}'(t)}_{\text{(i det här exemplet)}}$



$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = |(-\sin t, \cos t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{1} = 1$

Viktigt: vektorn $\mathbf{v}(t)$ är tangentvektorn till kurvan i punkten $\mathbf{r}(t)$



SATS: Deriveringsregler

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alla deriverbara

Då är $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\lambda \mathbf{u}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}\circ\lambda$ deriverbara och:

(a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$

(b) $(\lambda \mathbf{u})' = \lambda' \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}'$

(c) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})' = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'$

(d) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})' = \mathbf{u}'\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{v}'$

(e) $(\mathbf{u}(\lambda(t)))' = \lambda'(t)\,\mathbf{u}'(\lambda(t))$

(f) $|\mathbf{u}(t)|' = \dfrac{\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|}$ om $\mathbf{u}'(t) \neq 0$

Bevis: ...

Betrakta:

$$\mathbb{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\mathbb{r}(t) = (\cos(5t), \sin(5t))$$

Vilka kurvor beskriver de två olika $\mathbb{r}$:en?

Även om de verkar olika så beskriver de samma kurva C: enhetscirkeln.

De är två olika parametriseringar av kurvan C.

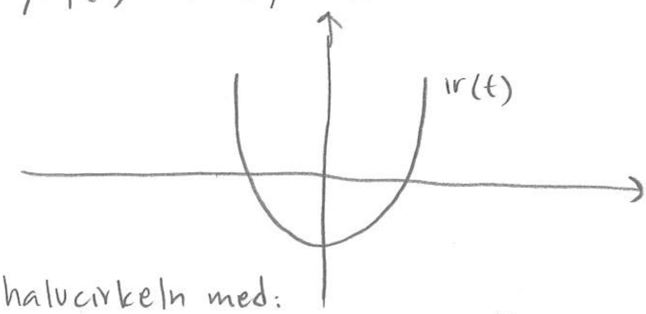
Det är bra att kunna byta parametrisering, ibland är en viss parametrisering enklare att jobba med.

Ex) $\mathbb{r}(t) = (1+t, (t+1)^2 - 3)$

Låt $s = 1+t \Rightarrow \mathbb{r}(s) = (s, s^2-3)$

En parametrisering där x-komponenten är parametern är smidig för då blir:

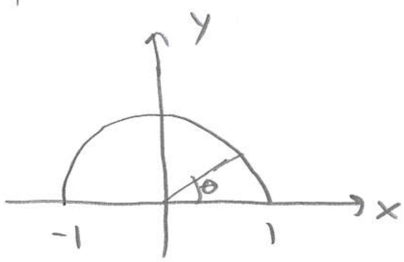
$$\begin{cases} x = s \\ y = s^2-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = x^2-3 \end{cases} \Rightarrow y = f(x) = x^2 - 3,$$ vilken är enklare att skissa



Ex) Parametrisera övre halvcirkeln med:

a) vinkeln θ som parameter

b) x-koordinaten som parameter



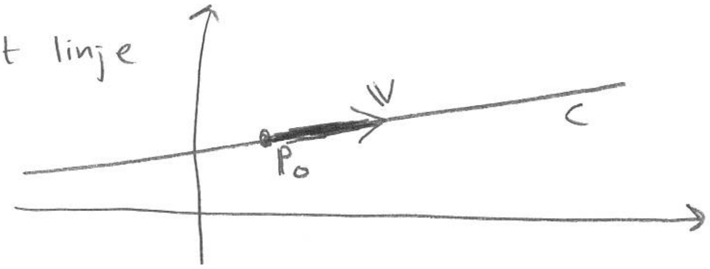
a) $$\left.\begin{matrix} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbb{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

b) Vi vill ha $\mathbb{r}(x) = (x, \_\_\overset{?}{\_}\_\_)$

Vi vet: $x^2+y^2=1 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$ på övre halvan ($y = -\sqrt{1-x^2}$ på nedre)

$$\Rightarrow \mathbb{r}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$$

Ex) Rät linje



Parametrisering av C: $\mathbb{r}(t) = \mathbb{P}_0 + t\mathbb{v}$

Generellt

En kurva C är en punktmängd i rummet som kan skrivas på formen: ($\mathbb{R}^3$-fallet)

$$\mathbb{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad a \le t \le b$$

där $x(t), y(t), z(t)$ är kurvans parametrisering.

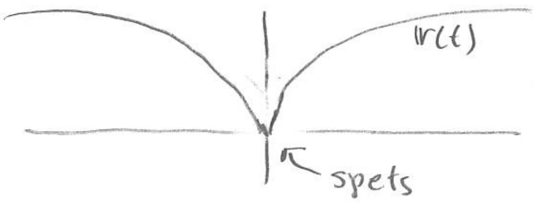
$x(t), y(t), z(t)$ måste vara kontinuerliga. (för att kurvan ska hänga ihop)

Vi fokuserar på kurvor där även $\mathbb{r}'(t)$ är kontinuerlig (motexempel Wiki: "Dragon curve", "Weierstrass function")

Kom ihåg: en kurva kan parametriseras på många olika sätt. Olika parametriseringar kan ge olika hastighet.

Ex) Hur kan en kurva som uppfyller $\mathbb{r}'(t) = 0$ se ut?

$\mathbb{r}(t) = (t^3, t^2)$ $\qquad$ $\mathbb{r}'(t) = (3t^2, 2t)$ $\qquad$ $\mathbb{r}'(0) = 0$



$\mathbb{r}(t) = (\max(0,t), (\max(0,t))^2)$

↑ står stilla för alla $t \le 0$