$\boxed{\text{F20}}$ 17/5 - 18

## Repetition: Newtons metod

Givet: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Mål: hitta $x \in \mathbb{R}^n$ så att $f(x) = 0$ — $\in \mathbb{R}^n$ dvs $0 = (0, 0, \dots, 0)$

## Härledning av Newtons metod m.h.a. linjarisering

Vi linjariserar $f$ runt $x$:

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x}$$

Notera: $x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$, $f'(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Tänk: vi står i $x$. Vi vill ta ett steg $\Delta x$ till $x + \Delta x$ så att $f(x + \Delta x) = 0$. Vi uppskattar $f$ med sin linjarisering och löser $f(x + \Delta x) = 0$, dvs:

$$0 = f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

$$\Rightarrow$$

$$f'(x)\,\Delta x = -f(x)$$

inversen ($f'(x)$ är en matris)

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x = -\left(f'(x)\right)^{-1} f(x)}$$

Vår ny punkt blir $x_{ny} = x + \Delta x = x - \left(f'(x)\right)^{-1} f(x)$

Vi får formeln:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \left(f'(x_i)\right)^{-1} f(x_i)}$$

## Newton i Matlab

x = newton(f, x0, tol)

- f   funktions-"handle"
- x0   startpunkt   $x0 = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$
- tol   tolerans (avgör när iterationen ska upphöra)

Viktigt: $x0 = \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}$ och f är sån att $f(x) = \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}$

```
function x = newton(f, x0, tol)
 x = x0;
 dx = 2*tol+1;
 while norm(dx) > tol
     Df = jacobi(f,x);
     dx = -Df \ f(x);
     x = x + dx;
 end
```

Ex) Lös $x^2 = 2$ m.h.a newton.m

funk = @(x) x^2 - 2;

x = newton(funk, 1, 1e-7);

Ex) Lös
$$x(1-y) = 0$$
$$y(1-x) = 0$$
m.h.a newton.m

funk = @(x) [x(1)*(1-x(2)) ; x(2)*(1-x(1))];

x = newton(funk, [2;2], 1e-7);

# Repetition: Svag formulering

Exl

$$-\nabla\cdot(a\nabla u)=f \quad \text{i } D$$
$$a D_{\hat{N}} u + k(u-u_A) = g \quad \text{på } S$$

stark form

(Antag 3 variabler)

1. $-\iiint_D \nabla\cdot(a\nabla u)v\,dV = \iiint_D fv\,dV$

2. P.I.

$$VL: -\iiint_D \nabla\cdot(a\nabla u)v\,dV = [P.I.] = -\iint_S \underbrace{\hat{N}\cdot(a\nabla u)}_{=a\nabla u\cdot\hat{N} = aD_{\hat{N}}u = g-k(u-u_A)}v\,dS + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dV$$

$$= -\iint_S (g-k(u-u_A))v\,dS + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dV =$$

$$= -\iint_S (g+ku_A)v\,dS + \iint_S kuv\,dS + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dV$$

HL: klart

3. Svag form

Hitta $u=u(x,y,z)$ så att

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dV + \iint_S kuv\,dS = \iiint_D fv\,dV + \iint_S (g+ku_A)v\,dS$$

för alla $v=v(x,y,z)$

Exl

$$-\nabla\cdot(a\nabla u)=f$$
$$\left.\begin{aligned} aD_{\hat{N}}u &= g \quad \text{på } S_1 \\ u &= u_A \quad \text{på } S_2 \end{aligned}\right\} S=S_1\cup S_2$$

stark form

(Antag 3 variabler)

1. $-\iiint_D \nabla\cdot(a\nabla u)v\,dV = \iiint_D fv\,dV$

med $v=0$ på $S_2$

(Välj alltid $v=0$ där vi har Dirichlet-villkor)

2. P.I.

$$VL: -\iiint_D \nabla\cdot(a\nabla u)v\,dV = [P.I.] = -\iint_{S=S_1\cup S_2} \hat{N}\cdot(a\nabla u)v\,dS + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dV$$

$$= -\iint_{S_1} \underbrace{\hat{N}\cdot(a\nabla u)}_{=aD_{\hat{N}}u = g}v\,dS - \iint_{S_2} \hat{N}\cdot(a\nabla u)\underbrace{v}_{=0}\,dS + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dV$$

$$= -\iint_{S_1} gv\,dS + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dV$$

HL: klart

3. Svag form

Hitta $u=u(x,y,z)$ med $u=u_A$ på $S_2$ så att

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dV = \iiint_D fv\,dV + \iint_{S_1} gv\,dS$$

för alla $v=v(x,y,z)$ med $v=0$ på $S_2$.

# Repetition: Parametrisering

## 1 parameter: kurvor

För att parametrisera en kurva räcker det med en parameter, eftersom kurvor är 1-dimensionella.

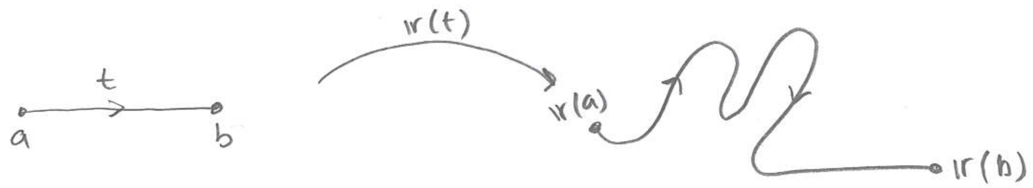
Följande exempel:

- $x^2+y^2=a^2$
- $y=x^2$
- skärningen mellan $z=x^2$ och $z=2-x^2-2y^2$

beskriver alla kurvor men ej på parametriserad form.

Generell form för parametrisering av en kurva i $\mathbb{R}^3$ är:

$$\boxed{\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)) \qquad a\le t\le b}$$




## Räta linjer

- Allmänn form: $\mathbf{r}(t)=\mathbf{c}+t\mathbf{d} \qquad a\le t\le b$
- Givet två punkter $\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1$: $\mathbf{r}(t)=\mathbf{P}_0+t(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)$

Ex) Linjen mellan $(1,3,-1)$ och $(2,0,4)$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t)&=(1,3,-1)+t\big((2,0,4)-(1,3,-1)\big)\\&=(1,3,-1)+t(1,-3,5)\\&=(1+t,3-3t,-1+5t) \qquad 0\le t\le 1\end{aligned}$$

- Givet en punkt $\mathbf{P}$ och en riktning $\mathbf{d}$: $\mathbf{r}(t)=\mathbf{P}+t\mathbf{d}$

Ex) Parametrisera tangentlinjen för kurvan $\mathbf{r}(t) = (t^2, \sin t, 2t)$ i punkten $\left(\frac{\pi^2}{4}, 1, \pi\right)$.

Lösn.

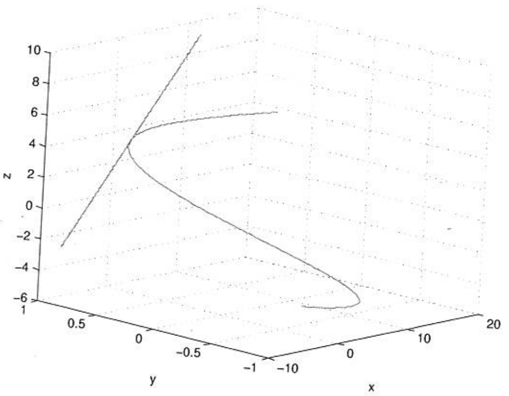
Riktningen ges av $\mathbf{r}'(t)$ i punkten.

$$\mathbf{r}'(t) = (2t, \cos t, 2)$$

$t = \frac{\pi}{2}$ i punkten $\Rightarrow \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\pi, 0, 2)$

Vi får tangentlinjen:

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\pi^2}{4}, 1, \pi\right) + t(\pi, 0, 2) = \left(\frac{\pi^2}{4} + t\pi, 1, \pi + 2t\right)$$




```
t = -3:0.01:3;

plot3(t.^2, sin(t), 2 * t, 'r')
hold on
plot3(pi^2/4 + t * pi, ones(size(t)), pi + 2 * t)
grid on
```

Cirklar

- Cirkel med radie $a$ centrerad i origo: $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$
- Cirkel med radie $a$ centrerad i $(b, c)$: $\mathbf{r}(t) = (a\cos t + b, a\sin t + c)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$
- Olika delar av en cirkel genom olika $\alpha, \beta$ i $\alpha \le t \le \beta$:

  $0 \le t \le 2\pi$ – hela varvet

  $0 \le t \le \pi$ – övre halvan

  $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ – högra halvan

  o.s.v.

## Givet några ekvationer/funktioner

Om det går att skriva om så att två variabler beror på den tredje, som:

$$y = y(x)$$

$$z = z(x)$$

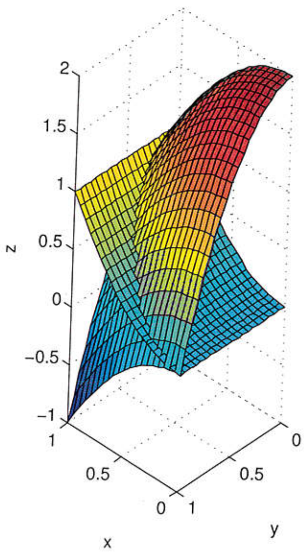
funkar det bra att parametrisera med $t = x$:

$$\mathbf{r}(t) = (t, y(t), z(t))$$

**Ex)** Skärning mellan $z = 2 - x^2 - 2y^2$ och $z = x^2$ i första oktanten. från $(0,1,0)$ till $(1,0,1)$.

```
[X, Y] = meshgrid(0:0.05:1);
Z1 = 2 - X.^2 - 2 * Y.^2;
Z2 = X.^2;

surf(X, Y, Z1)
hold on
surf(X, Y, Z2)
axis equal
```




Lösn:

Vi har $z = x^2$ och

$$z = 2 - x^2 - 2y^2 \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 - 2y^2$$

vilket blir

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{första} \\ \text{oktanten}}}{y = +}\sqrt{\underbrace{1 - x^2}_{\geq 0 \text{ om } -1 \leq x \leq 1}}$$

Så vi får

$$\begin{cases} x = x \\ y = \sqrt{1 - x^2} \\ z = x^2 \end{cases}$$

från $(0,1,0)$ till $(1,0,1)$ ger $0 \leq x \leq 1$

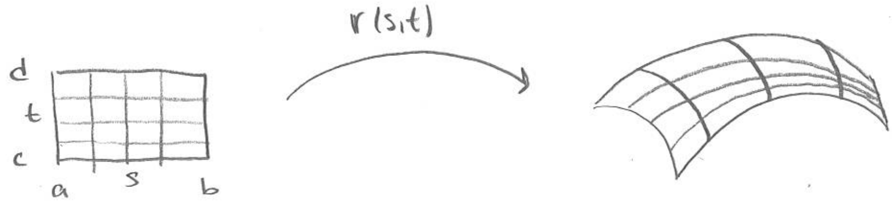
Alltså: $\underline{\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}, t^2) \quad 0 \leq t \leq 1}$

## 2 parametrar - ytor

Eftersom ytor är 2-dimensionella krävs det 2 parametrar.
Den allmänna formen är:

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t)) \qquad \begin{cases} a \le s \le b \\ c \le t \le d \end{cases}$$

a, b, c, d behöver dock inte vara konstanter



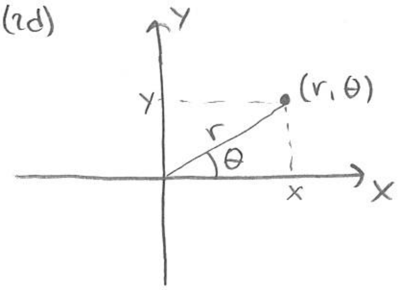

Tre viktiga koordinatsystem används ofta vid parametisering av ytor. Dessa är:

**Polära koordinater** (2d)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$dA = r\,dr\,d\theta$

$x^2 + y^2 = r^2$

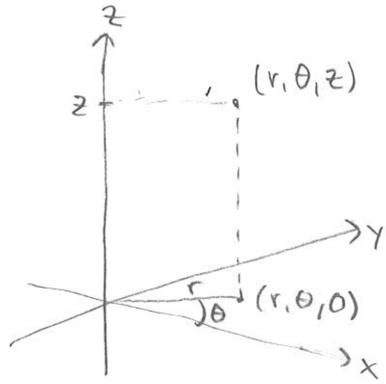



**Cylindriska koordinater** (3d)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$

$x^2 + y^2 = r^2$

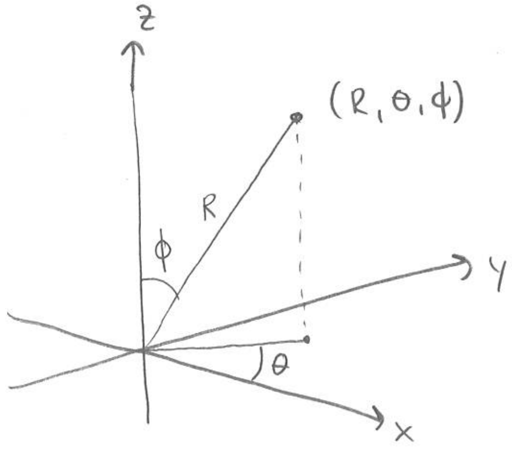



**Sfäriska koordinater** (3d)

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\phi \\ y = R\sin\theta\sin\phi \\ z = R\cos\phi \end{cases}$$

$dV = R^2\sin\phi\,dR\,d\theta\,d\phi$

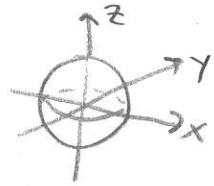
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$




$$\begin{pmatrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \pi \end{pmatrix}$$

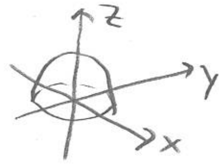
Ex] Sfär med radie $a$

Vi använder sfäriska koordinater men låter $R=a$



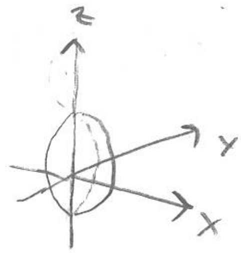

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = (a\cos\theta\sin\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\phi) \qquad \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \pi \end{cases}$$

Ex] Övre halvan av sfären ovan



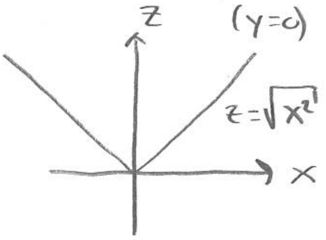

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = (\text{————— " —————}) \qquad \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

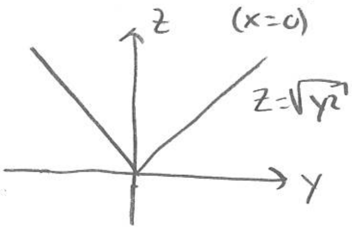
Ex] Delen av sfären med radie $a$ som har $x \geq 0$

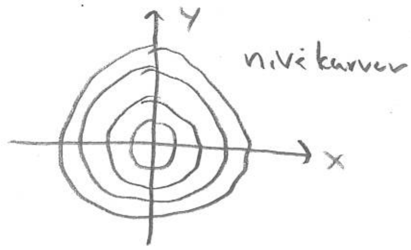


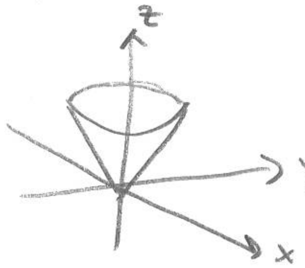

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = (\text{————— " —————}) \qquad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \phi \le \pi \end{cases}$$

Ex] Konen $z=\sqrt{x^2+y^2}$ mellan $z=0$ och $z=2$




Vi utgår från cylindriska koordinater men väljer

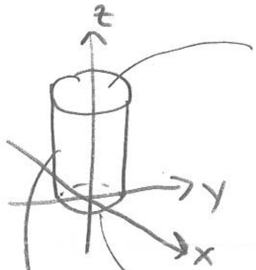
$$z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2} = r$$

D.v.s.:

$$0 \le \overset{=r}{z} \le 2$$

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ r) \qquad \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \ \longleftarrow \text{hela varvet} \end{cases}$$

Ex) Ytan av cylindern $x^2+y^2 \le a$, $0 \le z \le h$

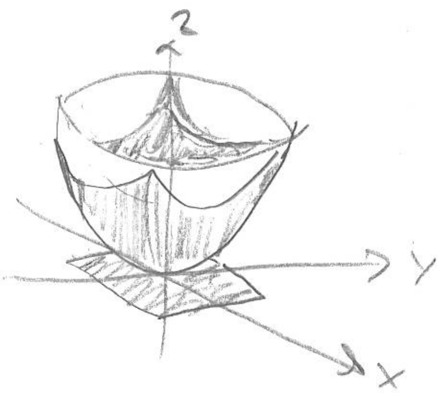


$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, h) \quad \begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \quad \begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\mathbf{r}(\theta,z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z) \quad \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le h \end{cases}$$

Ex) Ytan $z = x^2+y^2$ som ligger ovan kvadraten $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$



$$\mathbf{r}(x,y) = (x, y, x^2+y^2) \quad \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$$