F21 21/5 - 18

Repetition: värmeledningsekvationen

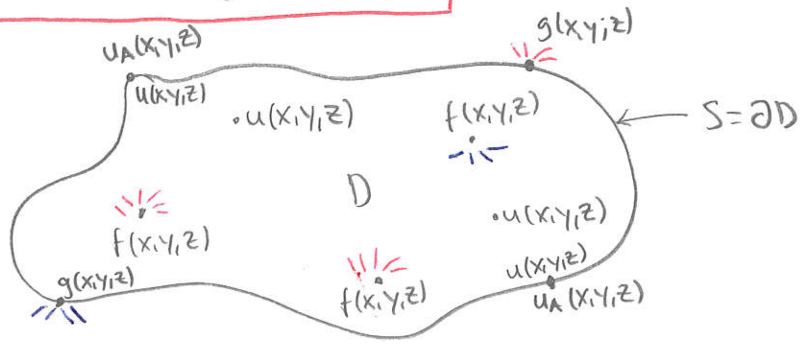
Grundproblem: ($\mathbb{R}^3$)

$$\boxed{\begin{aligned} -\nabla\cdot(a\nabla u) &= f \quad \text{i } D \\ a\nabla_{\hat{N}} u + k(u-u_A) &= g \quad \text{på } S \end{aligned}}$$

(i 1-d:

$-D(aDu) = f$

$- - - - - - -$)



(2d-skiss)

Parametrar hela området (D)

u – temperatur [K]

f – källtäthet för inre värmekällor [J/m³s]

a – värmeledningskoefficient [J/m K s] (hur lätt leds värme)

Parametrar för randen (S)

u_A – omgivande temperatur [K]

k – värmeöverföringskoefficient för det isolerade ytskiktet [J/m²sK]

$\begin{cases} k=0 & \text{perfekt isolering} \\ k=\infty & \text{helt oisolerat} \end{cases}$

g – flödestäthet för värmekällor på ytan [J/m²s]

Alla parametrar kan bero på x, y och z.

Viktig:

$-a\nabla u$ – värmeflödestätheten [J/m²s] (Fouriers lag)

- Ju högre temperaturskillnad (gradient), ju högre värmeflöde
- Ju högre värmeledningskoefficient, ju högre värmeflöde
- Värme går från varmt till kallt

Riktningar?

* u, f, a, u_A och k har ingen riktning:
    * u och u_A är ju temperatur
    * $f > 0$ det värms på
$f < 0$ det kyls ner
    * a, k är hur lätt/svårt värme flödar (leds)
* g har ingen riktning heller, men:
    * $g > 0$ randen värms på utifrån
    * $g < 0$ randen kyls av utifrån
* $-a\nabla u$ är ett vektorfält (d.v.s. har riktning)

  $D_{\hat{v}} \cdot (-a\nabla u)$ ger hur mycket värme som flödar i riktningen $\hat{v}$.

När du har u räknar du ut värmeflödestätheten genom

$$-a\nabla u \qquad (-a\nabla u \text{ i 1-d})$$

Flödet genom randen ges av

$$\hat{N} \cdot (-a\nabla u)$$

om

$\hat{N} \cdot (-a\nabla u) > 0 \Rightarrow$ det flödar utåt

$\hat{N} \cdot (-a\nabla u) < 0 \Rightarrow$ det flödar inåt

(i 1-d:

)

PDE Toolbox

Vår form:

$$\boxed{\begin{aligned} -\nabla\cdot(a\nabla u) + cu &= f \quad \text{i } \Omega \\ a\nabla_{\hat{N}} u + k(u-u_A) &= g \quad \text{på } S \end{aligned}}$$

$k \to \infty$ ger $u = u_A$ (Dirichlet)

PDE Toolbox:

$$\boxed{\begin{aligned} -\nabla\cdot(c\nabla u) + au &= f \\ n\cdot(c\nabla u) + qu &= g \\ hu &= r \end{aligned}}$$

(Dirichlet)

Vår form		PDE Toolbox	
a	$\longleftrightarrow$	c	
(c	$\longleftrightarrow$	a)	oftast $=0$
f	$\longleftrightarrow$	f	
k	$\longleftrightarrow$	q	
$g+ku_A$	$\longleftrightarrow$	g	
u_A	$\longleftrightarrow$	$\frac{r}{h}$	(ta $h=1 \Rightarrow u_A = r$)

Isolerad rand $\Rightarrow$ $k =$ något

Inte isolerad alls / oisolerad $\Rightarrow$ $k = \infty$ (Dirichlet)

Perfekt isolerad $\Rightarrow$ $k = 0$

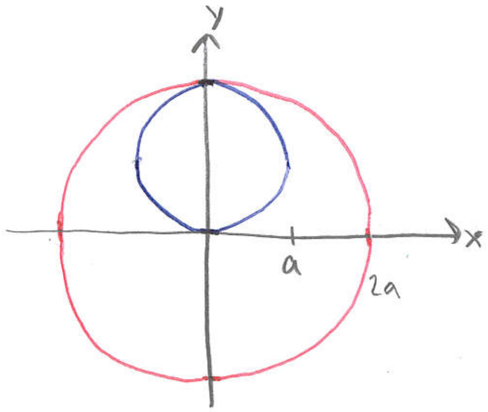
Svåra ytparametriseringar

Ex) Sfär och förskjuten cylinder

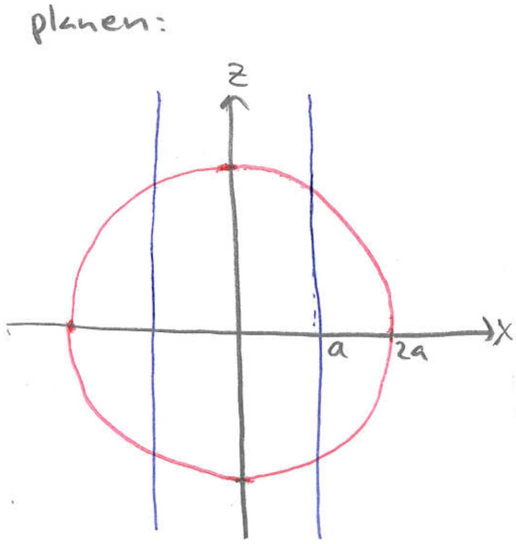
$\boxed{\text{Sfären: } x^2+y^2+z^2=4a^2}$

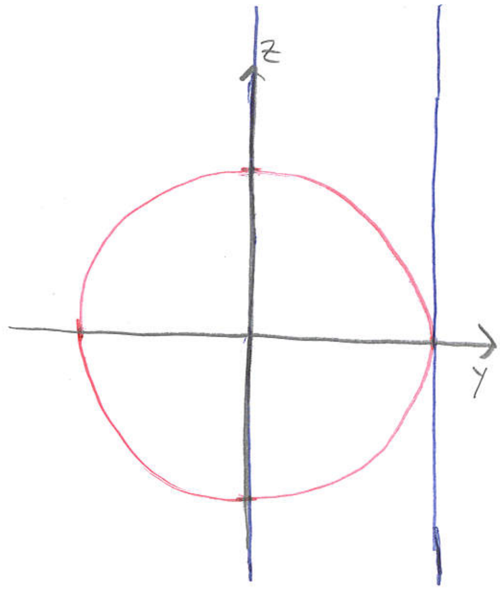
$\boxed{\text{Cylinder: } x^2+y^2=2ay \iff x^2+(y-a)^2=a^2}$

Vi skissar de tre planen:



$(z=0) \Rightarrow x^2+y^2=4a^2$

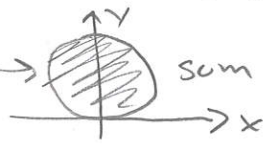




<u>Ytan av sfären inuti cylindern</u>

Tänk den blå cirkeln i första plotten (x-y-planet), fyll den och dra upp (i z-riktning) så att den lägger sig på sfärens yta

<u>Alt. 1</u>: Polära koordinater för förskjuten cylinder som basyta

Tänk →  som "basyta", dvs

$$x = r\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$y = r\sin\theta + a \qquad 0 \le r \le a$$

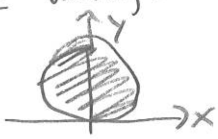
Vad blir z? Sfärens ekvation ger oss:

$$z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{4a^2 - (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta + a)^2}$$
$$= \sqrt{3a^2 - r^2 - 2ar\sin\theta}$$

$$\boxed{\text{Alltså: } \mathbf{r}(r,\theta) = \left(r\cos\theta,\ r\sin\theta + a,\ \sqrt{3a^2 - r^2 - 2ar\sin\theta}\right) \quad \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \end{cases}}$$

↑ kommer troligtvis ge jobbig integral

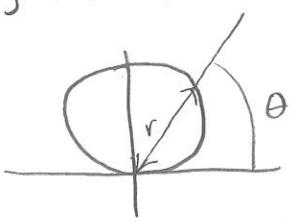
Alt.2: "Vanliga" polära koordinater som grund

Tänk  som basyta, men nu parametiserad med

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$, vi får $0 \le \theta \le \pi$

men r-intervallet blir svårare.

För ett givet θ:



Ska r gå från 0 ut till cylindern.

Cylinderns ekvation ger oss:

$$x^2+y^2 = 2ay \iff r^2 = 2ar\sin\theta \iff r = 2a\sin\theta$$

Alltså: $\underline{0 \le r \le 2a\sin\theta}$

Vad blir z? Sfärens ekvation ger oss:

$$z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{4a^2 - r^2}$$

Vi får:

$$\boxed{r(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{4a^2-r^2}) \qquad \begin{matrix} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 2a\sin\theta \end{matrix}}$$

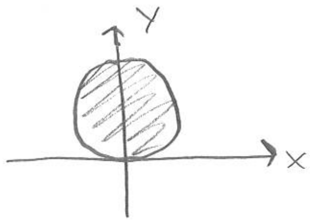
Alt. 3: Sfäriska koordinater

Vi utnyttjar att den sökta ytan ligger på sfären och använder därför sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = 2a\cos\theta\sin\phi \\ y = 2a\sin\theta\sin\phi \\ z = 2a\cos\phi \end{cases}$$

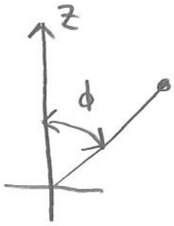
Vad blir gränserna för θ och ϕ?

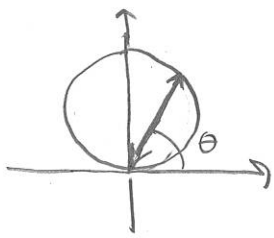
Från



ser vi att $0 \leq \theta \leq \pi$.

För ett specifikt θ är frågan hur långt ϕ ska gå





$0 \leq \phi \leq ?$

Alltså: vad är ϕ på cylindern (där sfären skärs).

Cylinderns ekvationen ger:

$$x^2 + y^2 = 2ay$$

$\Longleftrightarrow$

$$(2a\cos\theta\sin\phi)^2 + (2a\sin\theta\sin\phi)^2 = 2a\,2a\sin\theta\sin\phi$$

$\Longleftrightarrow$

$$4a^2\cos^2\theta\sin^2\phi + 4a^2\sin^2\theta\sin^2\phi = 4a^2\sin\theta\sin\phi$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\sin\phi = \sin\theta}$$

Försiktigt här:

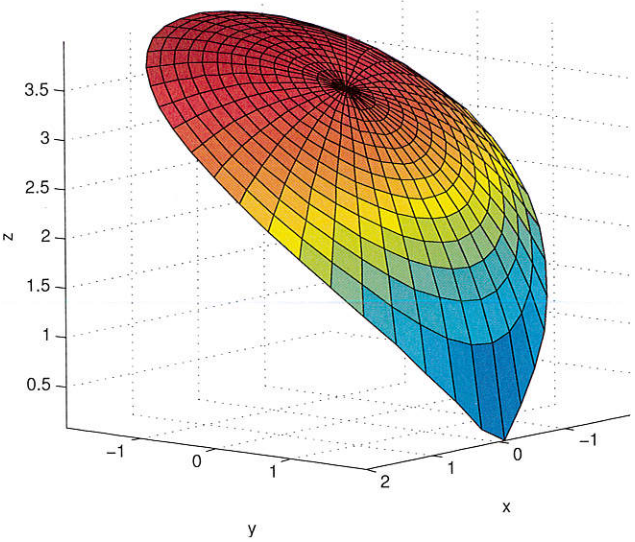
För $0 \leq$ vinkel $\leq \frac{\pi}{2}$ har vi $\sin\phi = \sin\theta \Longrightarrow \phi = \theta$

Så $0 \leq \phi \leq \theta$ om $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Vi får: $\boxed{\mathbf{r}(\phi,\theta) = (2a\cos\theta\sin\phi,\ 2a\sin\theta\sin\phi,\ 2a\cos\phi) \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \phi \leq \theta \end{matrix}}$

NOTERA

(Ta gånger 2 i integralen)



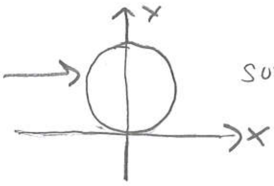

```
a = 2;
r = linspace(0, a, 15);
t = linspace(0, 2 * pi, 40);
[R, T] = meshgrid(r, t);

X = R .* cos(T);
Y = R .* sin(T);
Z = sqrt(3 * a^2 - R.^2 - 2 * a * R .* sin(T));

surf(X, Y, Z)
axis equal
```

Delen av sfären inuti cylindern. (övre delen)

Delen av cylindern inuti sfären

Tänk den blå cirkeln i första plotten (x-y-planet) och dra en yta från cirkeln rakt upp och rakt ner (i z-riktning) till sfärens yta.

Alt 1: Polära koordinater för förskjuten cylinder som grund

Tänk →  som bas, dvs: $x = a\cos\theta$, $x = a\sin\theta + a$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Låt $z = z$ och sätt gräns $0 \leq z \leq$ sfärens yta

↑ om vi vill ha övre halvan

annars: sfärens yta $\leq z \leq$ sfärens yta

Sfärens yta ges av dess ekvation:

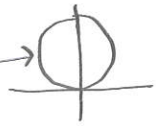
$$x^2+y^2+z^2 = 4a^2 \Rightarrow z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{4a^2 - (a\cos^2\theta) - (a\sin\theta + a)^2}$$

$$= \sqrt{2a^2 - 2a^2\sin\theta} = a\sqrt{2}\sqrt{1-\sin\theta}$$

Alltså: $\boxed{\mathbf{r}(\theta, z) = (a\cos\theta,\ a\sin\theta + a,\ z) \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq a\sqrt{2}\sqrt{1-\sin\theta}}$ (övre halvan)

Alt. 2: "Vanliga" polära koordinater som grund.

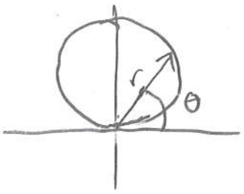
Tänk →



som bas men nu parametriserad som $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$0 \le \theta \le \pi$. Vad blir r:s gräns?

För ett givet θ ges r, av cirkeln:



Cirkeln ges av $x^2+y^2=2ay \iff r^2 = 2ar\sin\theta \implies \underline{r = 2a\sin\theta}$

Vi får alltså $x = 2a\sin\theta\cos\theta$

$y = 2a\sin\theta\sin\theta$

Vi låter $z = 0$, gränsen blir $0 \le z \le$ sfärens yta

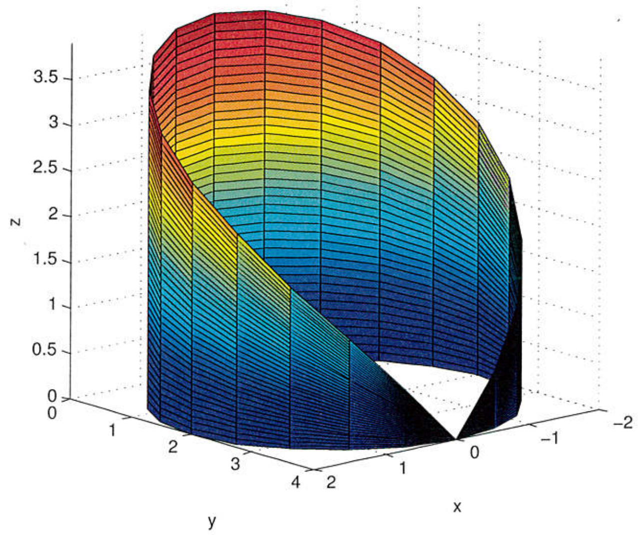
(övre halvan)

Sfärens yta ges av $x^2+y^2+z^2 = 4a^2 \implies z = \sqrt{4a^2 - r^2} = \sqrt{4a^2 - 4a^2\sin^2\theta}$

<u>Alltså:</u> $\mathbb{r}(\theta, z) = (2a\sin\theta\cos\theta,\ 2a\sin\theta\cos\theta,\ z)$ $0 \le \theta \le \pi$

$0 \le z \le 2a\sqrt{1-\sin^2\theta}$

```
a = 2;
t = linspace(0, 2 * pi, 41);
z = 0:40;
[T, Z] = meshgrid(t, z);
for i = 1:41
  Z(:, i) = Z(:, i) / 41 * 2 * a * sqrt(1 - sin(t(i)).^2);
end

X = 2 * a * sin(T) .* cos(T);
Y = 2 * a * sin(T) .* sin(T);

surf(X, Y, Z)
axis equal
```

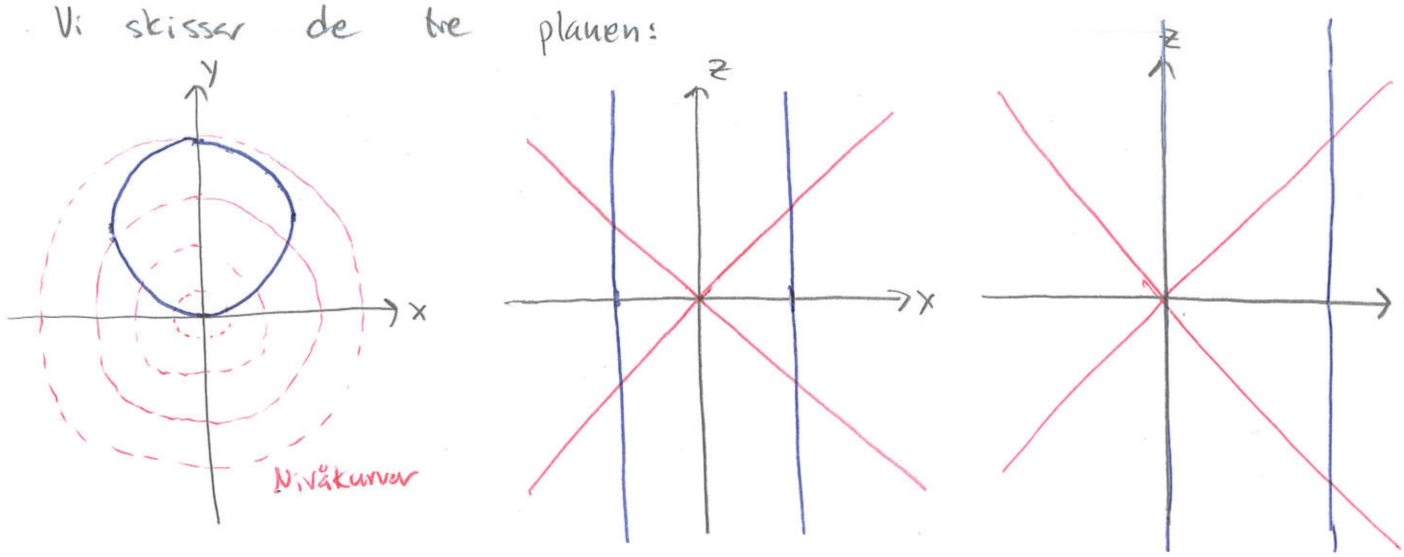


Ex) Kon och förskjuten cylinder

$$\boxed{\text{Kon: } z^2 = x^2 + y^2}$$

$$\boxed{\text{Cylinder: } x^2 + y^2 = 2ay \iff x^2 + (y-a)^2 = a^2}$$

Vi skissar de tre planen:



Delen av konen som ligger inuti cylinder

Tänk den blå cirkeln i första plotten (x-y-planet), fyll den och dra upp (i z-riktning) den så att den lägger sig på konens yta.

Alt 1: Polära koordinater för förskjuten cylinder som grund

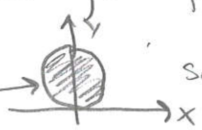
Tänk →  som basyta; dvs $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta + a$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le a$

Vad blir z? Konens ekvation ger

$$z^2 = x^2 + y^2 \implies z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta + a)^2} = \sqrt{r^2 + 2ra\sin\theta + a^2}$$

Vi får: $$\boxed{\mathbf{r}(r,\theta) = \left(r\cos\theta,\ r\sin\theta + a,\ \sqrt{r^2 + 2ra\sin\theta + a^2}\right) \quad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \end{array}}$$

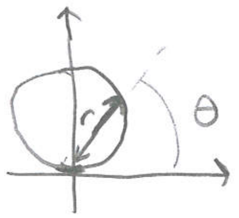
Alt 2: "vanliga" polära koordinater som grund

Tänk →  som basyta, men nu parametriserad med

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, vi får $0 \le \theta \le \pi$

→

r-gränsen blir svårare: för ett givet θ:



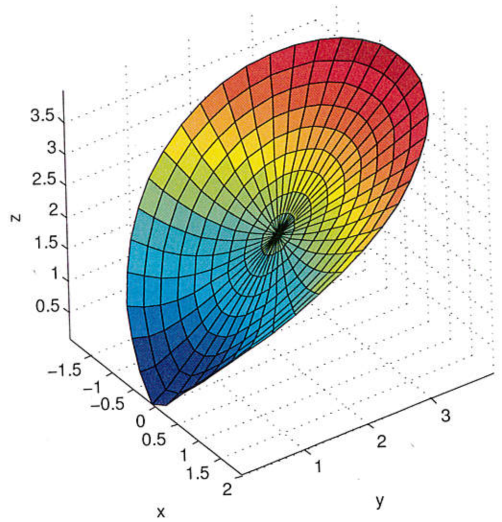
ska r gå från 0 ut till cylindern. Cylinderns ekvation ger oss:

$$x^2+y^2=2ay \Rightarrow r^2=2ar\sin\theta \Rightarrow r=2a\sin\theta$$

Alltså: $\underline{0 \le r \le 2a\sin\theta}$

Vad blir z? Konens ekvation ger oss $z^2=x^2+y^2=r^2 \Rightarrow z=r$

Vi får $\boxed{\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta, r) \qquad \begin{array}{l} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le r\le 2a\sin\theta \end{array}}$




```
a = 2;
r = linspace(0, a, 10);
t = linspace(0, 2 * pi, 40);
[R, T] = meshgrid(r, t);

X = R .* cos(T);
Y = R .* sin(T) + a;
Z = sqrt(R .^2 + 2 * R .* a .* sin(T) + a^2);

surf(X, Y, Z)
axis equal
```

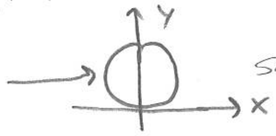
Delen av övre konen som ligger inuti cylindern.
(Notera hur de svarta linjerna hänger ihop med parametriseringen)

⟶

Delen av cylindern som ligger utanför konen

Tänk den blå cirkeln i x-y-plansplotten och ytan som bildas om den blå cirkeln fortsätter uppåt i z-riktning tills den möter konen.

Alt 1: Polära koordinater för förskjuten cylinder som grund

Tänk  som bas: $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta + a$, $0 \le \theta \le 2\pi$

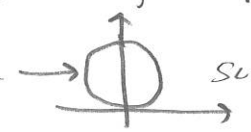
Låt $z = z$ och sätt gräns från $z = 0$ till konen som ges av $z^2 = x^2 + y^2 = (a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta + a)^2 = a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta + 2a^2\sin\theta + a^2$

$$= 2a^2 + 2a^2\sin\theta \implies z = \sqrt{2}\,a\sqrt{1+\sin\theta}$$

Alltså: $0 \le z \le a\sqrt{2}\sqrt{1+\sin\theta}$

Vi får
$$\boxed{\mathbf{r}(\theta, z) = (a\cos\theta, a\sin\theta + a, z) \qquad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le a\sqrt{2}\sqrt{1+\sin\theta} \end{array}}$$

Alt 2: "Vanliga" polära koordinater som grund

Tänk  som bas, parametriserad med $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $0 \le \theta \le \pi$

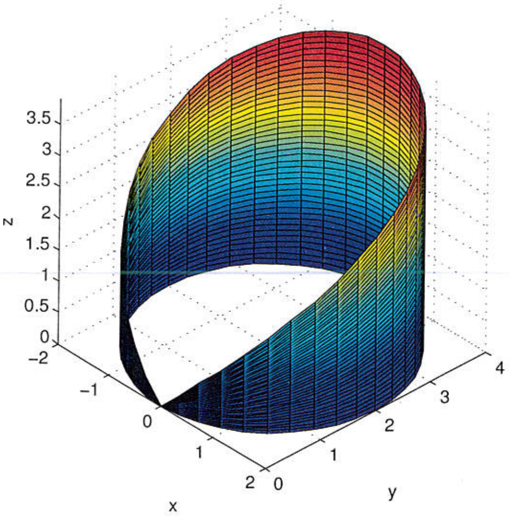
Cylinderns ekvationen ger oss: $x^2 + y^2 = 2ay \implies r^2 = 2ar\sin\theta$

$$\implies r = 2a\sin\theta$$

Alltå: $x = 2a\sin\theta\cos\theta$, $y = 2a\sin\theta\sin\theta$ $\quad 0 \le \theta \le \pi$

Låt $z = z$ och sätt gräns från $z = 0$ till konen som ges av $z^2 = x^2 + y^2 = r^2 \implies z = r = 2a\sin\theta$

Vi får:
$$\boxed{\mathbf{r}(\theta, z) = (2a\sin\theta\cos\theta, 2a\sin\theta\sin\theta, z) \qquad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le z \le 2a\sin\theta \end{array}}$$




```
a = 2;
t = linspace(0, pi, 41);
z = 0:40;
[T, Z] = meshgrid(t, z);
for i = 1:41
  Z(:, i) = Z(:, i) / 41 * 2 * a * sin(t(i));
end

X = 2 * a * sin(T) .* cos(T);
Y = 2 * a * sin(T) .* sin(T);

surf(X, Y, Z)
axis equal
```

Övre delen av cylindern som ligger utanför konen.