MVE255

$\boxed{F22}$ 22/5-18

$\boxed{Ex}$ 171006

1.5. PDE Toolbox har randvärdesproblem av typen "Generic scalar problem":

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n\cdot(c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases} \qquad (**)$$

Vad ska man fylla i för värden på c, a, f, q, g, h, r för ett värmeledningsproblem med ingen inre värmekälla, värmeledningskoefficient = 13 `[J/(m s K)]` i kvadraten $D = [0,1]\times[0,1]$. Hela randen är isolerad med koefficient 11 `J/(m^2 s K)` . På hela randen finns en yttre uppvärmning med flödestätheten 12 `J/(m^2 s)` och omgivningens temperatur är 7 `K`.

Lösn:

Vi har allmänn form:

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f & \text{i } D \\ a\, D_N u + k(u-u_A) = g & \text{på } S \end{cases} \qquad (*)$$

- Ingen inre värmekälla $\Rightarrow$ $\underline{f=0}$
- Värmeledningskoefficient 13 $\Rightarrow$ $\underline{a=13}$
- $D=[0,1]\times[0,1]$
- Hela randen isolerad med koefficient 11 $\Rightarrow$ $\underline{k=11}$
- På hela randen finns en yttre uppvärmning med flödestäthet 12 $\Rightarrow$ $\underline{g=12}$
- Omgivningens temperatur 7 $\Rightarrow$ $\underline{u_A=7}$

Vi jämför $(*)$ med $(**)$

$(*)$		$(**)$
$f=0$	$\Rightarrow$	$f=0$
$a=13$	$\Rightarrow$	$c=13$
---	$\Rightarrow$	$a=0$
$k=11$	$\Rightarrow$	$q=11$
---	$\Rightarrow$	$g=12+11\cdot 7=89$

Svar: $f=0,\ c=13,\ a=0,\ q=11,\ g=89$

Ingen S_1 $\Rightarrow$ h, r sätts ej

(ingen Dirichlet)

Exj 170530

2

1.5. PDE Toolbox har randvärdesproblem av typen "Generic scalar problem":

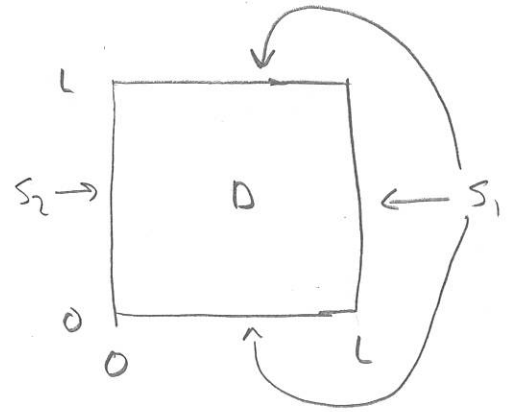
$$\begin{cases} -\nabla\cdot(c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n\cdot(c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases} \qquad (**)$$

Vad ska man fylla i för värden på c, a, f, q, g, h, r för ett värmeledningsproblem med inre värmekälla $= 7$ J/(m^3 s), värmeledningskoefficient $= 13$ [J/(m s K)] i kvadraten $D = [0, L] \times [0, L]$. Randen $x = 0$ är isolerad med koefficient 11 J/(m^2 s K) och resten av randen har ingen isolering alls. Inga värmekällor på randen, yttre temperatur $= 6$ K. Vilka delar av randen är S_1 respektive S_2?

Lösn:

Vi har allmänn form:

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f & \text{i } D \\ a D_{\hat{n}} u + k(u-u_A) = g & \text{på } S \end{cases} \qquad (*)$$



- Inre värmekälla 7 $\Rightarrow$ $f = 7$
- Värmeledningskoefficient 13 $\Rightarrow$ $a = 13$
- $D = [0,L] \times [0,L]$
- Randen $x=0$
  - Isolerad med koefficient 11 $\Rightarrow$ $k = 11$
- Resten av randen
  - Ingen isolering alls $\Rightarrow$ $k = \infty$ $\Rightarrow$ Dirichlet $u = u_A$
- Inga värmekällor på randen $\Rightarrow$ $g = 0$
- Yttre temperatur 6 $\Rightarrow$ $u_A = 6$

Vi jämför $(*)$ med $(**)$

$(*)$		$(**)$
$f = 7$	$\Rightarrow$	$f = 7$
$a = 13$	$\Rightarrow$	$c = 13$
---	$\Rightarrow$	$a = 0$
$k = 11$ på S_2	$\Rightarrow$	$q = 11$ på S_2
----	$\Rightarrow$	$g = 0 + 11\cdot 6 = 66$ på S_2
$u = u_A$ på S_1	$\Rightarrow$	$hu = r$ på S_1 med $h = 1$ och $r = 6$

Svar: $f = 7, c = 13, a = 0$

$S_1 = \{0 \le x \le L, y = 0\} \cup \{0 \le x \le L, y = L\} \cup \{x = L, 0 \le y \le L\}$ $\begin{matrix} h = 1 \\ r = 6 \end{matrix}$

$S_2 = \{x = 0, 0 \le y \le L\}$ $q = 11, g = 66$

Ex] 120111

6. Beräkna utflödet av vektorfältet $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ genom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Lösn:

Sökt: $\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = [\text{Gauss}] = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_D 3\overbrace{(x^2+y^2+z^2)}^{R^2}\,dV$$

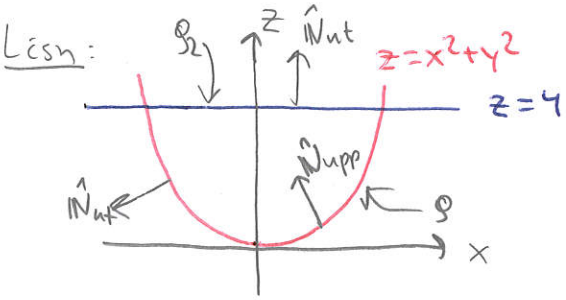
$$= [\text{Sfäriska koordinater}] = 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} R^2 R^2 \sin\phi \, dR\,d\phi\,d\theta$$

$$= 3\cdot 2\pi \left[\frac{R^5}{5}\right]_0^2 \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} = 6\pi\,\frac{2^5}{5}\cdot 2 = \underline{\underline{\frac{3}{5}\,2^7\pi}}$$

Ex] 110827

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ genom den del av ytan $z = x^2 + y^2$ som ligger under planet $z = 4$. Ytan orienteras med uppåtriktade normalvektorer.

Lösn:



$S = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_2$ omsluter ett område D

Sökt $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_{upp}\,dS$

Från Gauss har vi:

$$\underbrace{\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_{ut}}_{\text{Gauss}} = \underbrace{\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_{ut}\,dS}_{= -\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_{upp}\,dS} + \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_{ut}\,dS$$

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_D 2\,dV = [\text{cylindriska}] = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} r\,dz\,dr\,d\theta = 4\pi\int_0^2 \left[rz\right]_{z=r^2}^{z=4} dr$$

$$= 4\pi\int_0^2 r(4-r^2)\,dr = 4\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4\pi\left(8 - \frac{16}{4}\right) = \underline{\underline{16\pi}}$$

$$\iint_{S_2} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = ?$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbb{F}=(x,y,0)\\&\hat{\mathbb{N}}=(0,0,1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}} = x\cdot 0 + y\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{S_2} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = 0$$

Vi har alltså:

$$16\pi = \iint_{S} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}_{ut}\,dS + 0$$

$$\Rightarrow \iint_{S} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}_{ut}\,dS = 16\pi \Rightarrow \iint_{S} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}_{upp}\,dS = \underline{\underline{-16\pi}}$$

Svar: $\underline{-16\pi}$

Ex] Parametrisera tangentlinjen till kurvan $\mathbb{r}(t)=(t,t^2,t^3)$; punkten $(-2,4,-8)$.

Lösn:

Tangenten $= \mathbb{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$

Punkten $(-2,4,-8)$ ger $t=-2$

$\mathbb{r}'(-2) = (1,-4,12)$

Tangentlinjen blir:

$$\mathbb{r}(t) = \mathbb{r}(-2) + t\,\mathbb{r}'(-2) = \underline{\underline{(-2,4,-8) + t(1,-4,12)}}$$

Ex) Beräkna rotationen för $\mathbb{F} = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x, 0)$

Lösn:

$$\operatorname{rot}\mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right)$$

$$= \left(0, 0, \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x(2x+0)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y(0+2y)}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= \underline{(0, 0, 0)} = \mathbb{0}$$

Ex) Visa att $\nabla \cdot (\mathbb{F} \times \mathbb{G}) = (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \mathbb{G} - \mathbb{F} \cdot (\nabla \times \mathbb{G})$.

Lösn

Låt $\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3)$ och $\mathbb{G} = (G_1, G_2, G_3)$

$$\mathbb{F} \times \mathbb{G} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = (F_2 G_3 - F_3 G_2, F_3 G_1 - F_1 G_3, F_1 G_2 - F_2 G_1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbb{F} \times \mathbb{G}) = \frac{\partial}{\partial x}(F_2 G_3 - F_3 G_2) + \frac{\partial}{\partial y}(F_3 G_1 - F_1 G_3) + \frac{\partial}{\partial z}(F_1 G_2 - F_2 G_1)$$

$$= F_2^x \underline{G_3} + \underline{F_2} G_3^x - F_3^x \underline{G_2} - \underline{F_3} G_2^x$$

$$+ F_3^y \underline{G_1} + \underline{F_3} G_1^y - F_1^y \underline{G_3} - \underline{F_1} G_3^y$$

$$+ F_1^z \underline{G_2} + \underline{F_1} G_2^z - F_2^z \underline{G_1} - \underline{F_2} G_1^z$$

$$= \overbrace{(G_1, G_2, G_3)}^{=\mathbb{G}} \cdot \overbrace{(F_3^y - F_2^z, F_1^z - F_3^x, F_2^x - F_1^y)}^{\nabla \times \mathbb{F}}$$

$$+ \underbrace{(F_1, F_2, F_3)}_{=\mathbb{F}} \cdot \underbrace{(G_2^z - G_3^y, G_3^x - G_1^z, G_1^y - G_2^x)}_{-\nabla \times \mathbb{G}} = HL$$