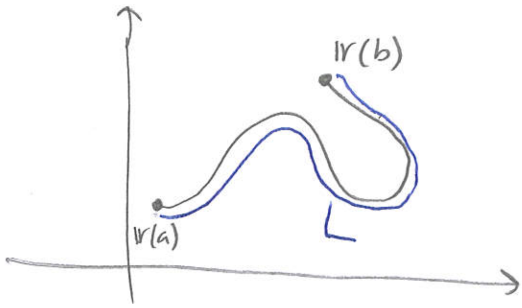
# F2 20/3-18 Mer om kurvor

## Kurvlängd

Givet en kurva $C$ med parametrisering $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, ges kurvans längd av

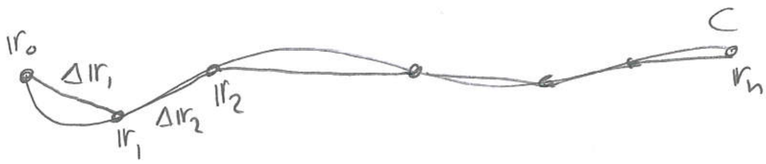
$$\boxed{L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt}$$

Kurvlängd




## Varför?

Approximera kurvan med korta raka segment




$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ $\qquad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i)$

$\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$ $\qquad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

Kurvans ungefärliga längd blir

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} |\Delta \mathbf{r}_i| = \left\{ \begin{matrix} \text{omskri-} \\ \text{vning} \end{matrix} \right\} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i$$

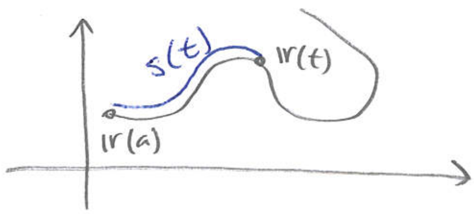
Låt $n \to \infty$ och $\max \Delta t_i \to 0$, vi får:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i \longrightarrow \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

---

**Båglängden** $s(t)$ är längden på kurvan från $\tilde{t} = a$ till $\tilde{t} = t$, dvs

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tilde{t})|\,d\tilde{t}$$



Hur ändras båglängden när en åker längs med kurvan?
Den växer, men hur fort? Vi deriverar $s(t)$:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_a^t |\mathbb{r}'(\hat{t})|\,d\hat{t}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{känd sats}\\ \text{från envariabel-}\\ \text{analys}\end{array}\right\} = |\mathbb{r}'(t)| = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{farten}}}{v(t)}$$

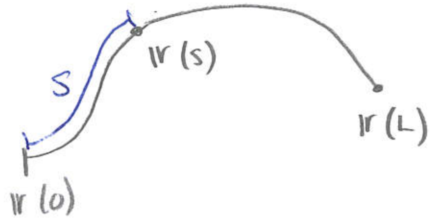
Dvs: derivatan av båglängden är farten.

---

Det är vanligt att parametrisera en kurva med båglängden som parameter:

$\mathbb{r}(s) \quad 0 \le s \le L$

$\uparrow$ då används ofta $s$ istället för $t$



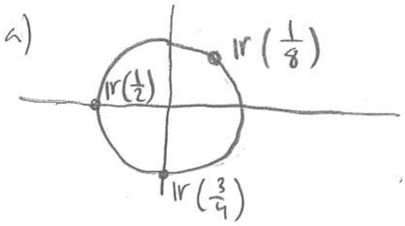

En sådan parametrisering uppfyller:

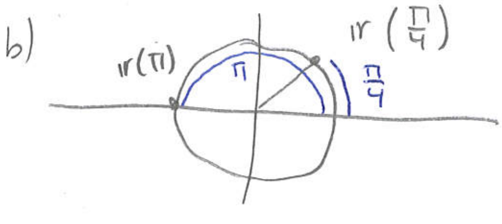
$$\int_0^t |\mathbb{r}'(s)|\,ds = t$$

Ex a) $\mathbb{r}(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ b) $\mathbb{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

a): parametriserad efter "antal varv"

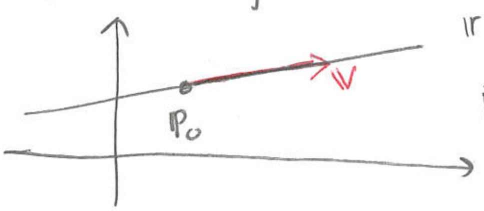
b): parametriserad efter båglängd




---

Ex Rät linje




$\mathbb{r}(t) = \mathbb{P}_0 + t\,\mathbb{v}$

Parametriserad efter båglängd: $\mathbb{r}(t) = \mathbb{P}_0 + \frac{t}{|\mathbb{v}|}\mathbb{v}$

**Ex** Cirkel allmänt

$\mathbf{r}(t) = \left(R\cos\frac{t}{R},\ R\sin\frac{t}{R}\right)$ är båglängdsparametriserad

$R$: radie

Varför?

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tilde{t})|\,d\tilde{t} = \int_0^t \left|\left(-\sin\frac{\tilde{t}}{R},\ \cos\frac{\tilde{t}}{R}\right)\right| d\tilde{t} = \int_0^t \sqrt{\left(\sin\frac{\tilde{t}}{R}\right)^2 + \left(\cos\frac{\tilde{t}}{R}\right)^2}\,d\tilde{t}$$

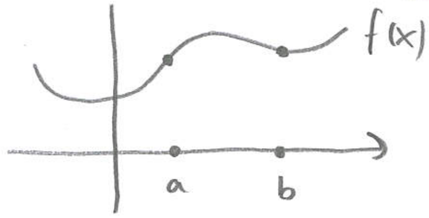
låt $a = 0$

$$= \int_0^t \sqrt{1}\,d\tilde{t} = \int_0^t 1\,d\tilde{t} = t \quad \Rightarrow \quad s(t) = t$$

---

**Ex** Vanlig graf $y = f(x)$

Båglängd från $a$ till $b$?




Parametrisera: $\mathbf{r}(t) = (t, f(t)) \quad a \le t \le b$

Använd formeln: $\mathbf{r}'(t) = (1, f'(t)) \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$

$$\Rightarrow \quad L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt$$

---

## Kurva: enhetstangent, enhetsnormal, krökning

Låt $\mathbf{r}(t)$ vara en parametrisering av en kurva $C$.

- Enhetstangent: $\boxed{\hat{\mathbf{T}}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}}$ $\quad (\mathbf{r}'(t) \neq 0)$

(normerade hastigheten)

Antag från nu att $C$ är båglängdsparametriserad (vi betecknar parametern $s$, $\mathbf{r}(s)$, $\hat{\mathbf{T}}(s)$)

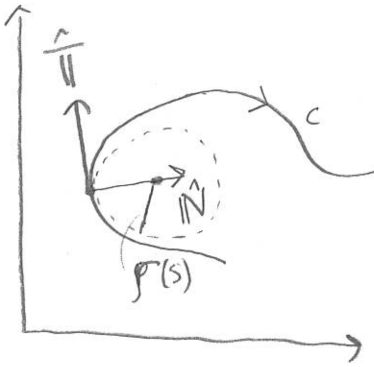
- Enhetsnormal: $\boxed{\hat{\mathbf{N}}(s) = \dfrac{\hat{\mathbf{T}}'(s)}{|\hat{\mathbf{T}}'(s)|}}$

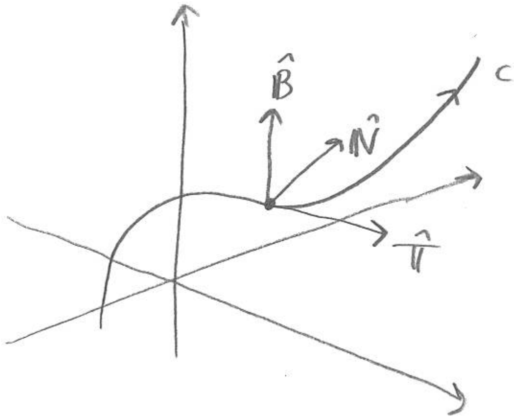
(normerade accelerationen)

- Krökning $\boxed{\kappa(s) = |\hat{\mathbf{T}}'(s)|}$

(
- Enhetsbinormal: $\hat{\mathbf{B}}(s) = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}$
- Krökningsradie: $r(s) = \dfrac{1}{\kappa(s)}$

)




Ju mer en kurva böjer, ju snabbare ändras $\hat{T}$, ju längre blir $\hat{T}'$, ju större blir $|\hat{T}'| = \kappa$, krökningen.

---

$\hat{T} \perp \hat{N}$ (vinkelräta)

Bevis

Vi vet: $\hat{T} \cdot \hat{T} = |\hat{T}|^2 = 1$

Derivera båda sidor

$(HL)' = 0$

$(VL)' = \hat{T}' \cdot \hat{T} + \hat{T} \cdot \hat{T}' = 2\hat{T} \cdot \hat{T}'$

$$\Rightarrow \hat{T} \cdot \hat{T}' = 0 \quad \Rightarrow \hat{T} \cdot \hat{N} = \hat{T} \cdot \frac{\hat{T}'}{|\hat{T}'|} = 0$$

---

Notera igen: $\mathbf{r}(t)$ måste vara parametriserad efter båglängd ovan och sådana parametriseringar är ofta svåra att göra.

Krökning för allmän parametrisering ges av: $\kappa = \dfrac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3}$

---

## Reellvärda funktioner i flera variabler

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

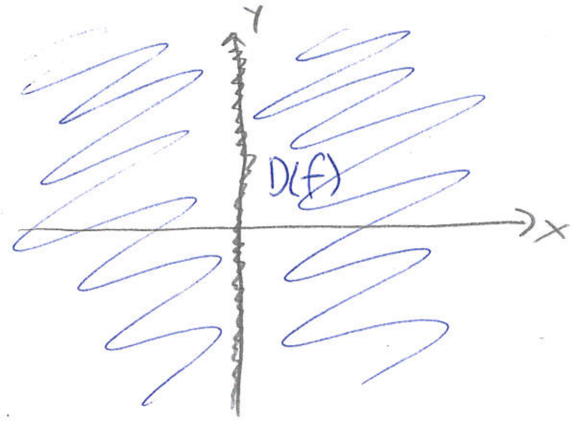
Ex: $f(x,y) = x^2 y + 2x$, $g(x,y,z) = \sin(xy) + \ln(z^2)$

5

$f: D(f) \longrightarrow V(f)$ där:

D(f): definitionsmängd: alla punkter som "fås" sättas in i f

V(f): värdemängd: alla värden f antar då punkterna i D(f) sätts in.




Ex) $f(x,y) = \dfrac{x+y^2}{x}$

$D(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \}$

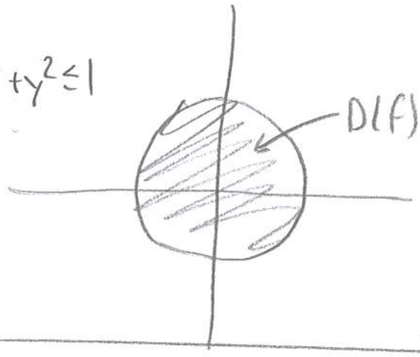
$V(f) = \mathbb{R}$

ty: $f(x,y) = 1 + \dfrac{y^2}{x}$

$\left.\begin{array}{l} f(1,y) = 1 + y^2 \\ f(-1,y) = 1 - y^2 \end{array}\right|$ genom att välja y kan godtyckligt värde i $\mathbb{R}$ nås.

Ex) $f(x,y) = \sqrt{\underbrace{1-x^2-y^2}_{\geq 0}} = \sqrt{1-\underbrace{(x^2+y^2)}_{\leq 1}} \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1$

$D(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \}$ = enhetsskivan




## Visualisering i Matlab

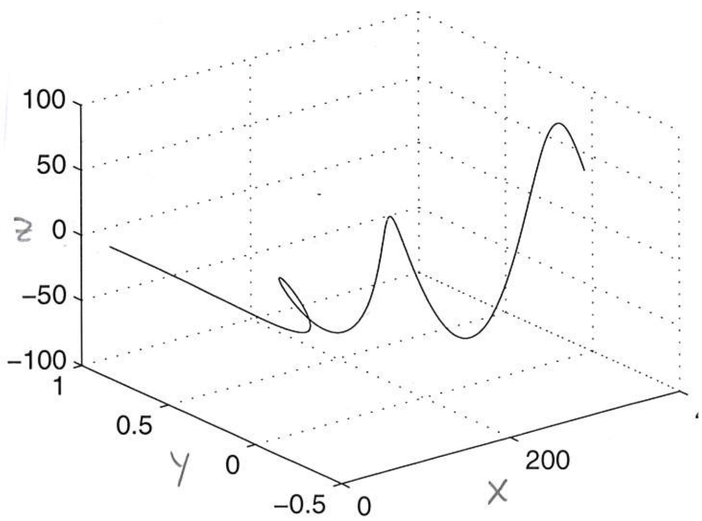
$\boxed{\text{METOD}}$: Plotta kurvan $\mathbb{r}(t)$, $a \leq t \leq b$
$\mathbb{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

t = a:0.01:b; ← skapa parameterintervallet

x = ...; Ex. om $x(t) = t^2 + e^t$
y = ...; så x = t.*t + exp(t);
z = ...;

plot3 (x,y,z) om 3-d

plot (x,y) om 2-d

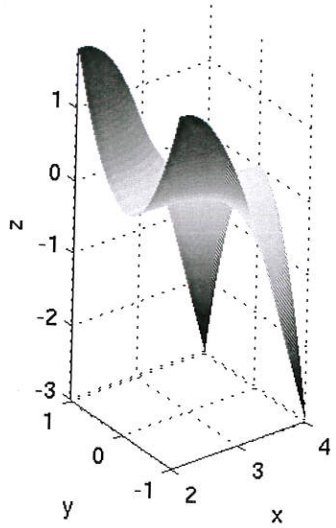



```
t = 1:0.01:20;
x = t .^ 2;
y = sin(t) ./ t;
z = t .* sqrt(t) .* cos(t);
plot3(x, y, z);

grid on
```

**METOD**: Plotta funktionsyta $f(x,y)$ på området $\begin{cases} x_0 \le x \le x_1 \\ y_0 \le x \le y_1 \end{cases}$

```
x = x0 : 0.01 : x1;
y = y0 : 0.01 : y1;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z = ....;
surf(X,Y,Z)
```

Ex. om $f(x,y)=x^2+y$, så `Z = X.^2 + Y;`



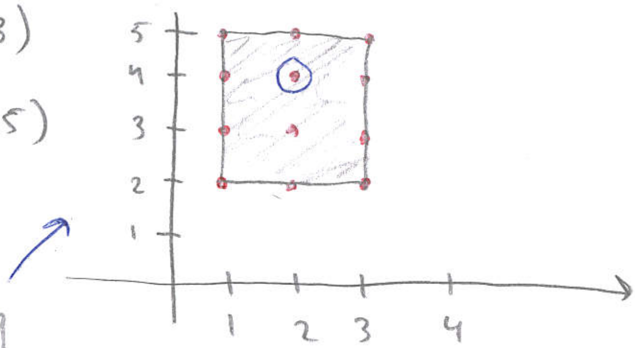

```
x = 2:0.01:4;
y = -1:0.01:1;
[X, Y] = meshgrid(x, y);
Z = sin(X) ./ X .* (X .* Y) .^ 2;
surf(X, Y, Z)

axis equal
shading interp
```

## Vad gör meshgrid

Låt x = [1 2 3] (x = 1:3)

y = [2 3 4 5] (y = 2:5)

[X,Y] = meshgrid(x,y); ger




$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

X är x-koordinaterna för alla punkter.

Y är y- ——"——

Sedan blir

`Z = X.^2 + Y;`

funktionsvärdena i alla punkter:

$$Z = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 4 & 7 & 12 \\ 5 & 8 & 13 \\ 6 & 9 & 14 \end{bmatrix}$$