F3 Fortsättning $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

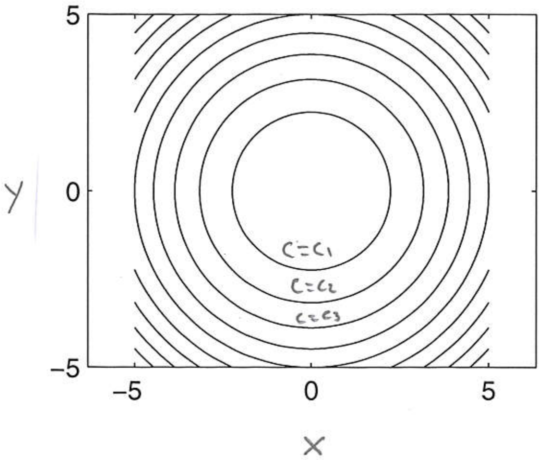
Nivåkurva

Givet: en funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Alla punkter $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller ekvationen

$$\boxed{f(x,y) = C}$$

där $C \in \mathbb{R}$ är en konstant blir en kurva i $\mathbb{R}^2$ som kallas nivåkurva.

Ex: $f(x,y) = x^2 + y^2$

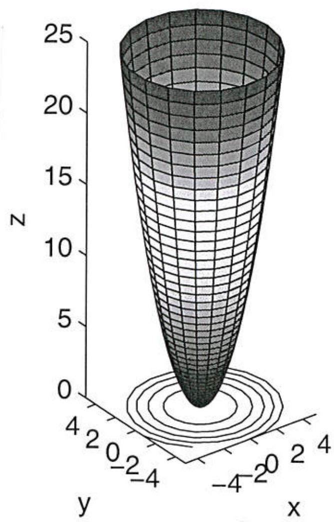



```
[R, T] = meshgrid(0:0.1:5, linspace(0, 2 * pi, 20));
X = R .* cos(T);
Y = R .* sin(T);
Z = X .^ 2 + Y .^ 2;

surfc(X, Y, Z)
axis equal
grid off
```

```
[X, Y] = meshgrid(-5:0.01:5);
Z = X .^ 2 + Y .^ 2;

contour(X, Y, Z)
axis equal
```



$f(x,y)$ plottas som en yta i $\mathbb{R}^3$

$f(x,y) = C$ plottas som en kurva i $\mathbb{R}^2$

Nivåyta

Givet: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Alla punkter $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$\boxed{f(x,y,z) = C}$$

där C är en konstant blir en yta i $\mathbb{R}^3$ som kallas nivåyta.

Matlab

contour(X, Y, Z)
surfc(X, Y, Z)
meshc(X, Y, Z)

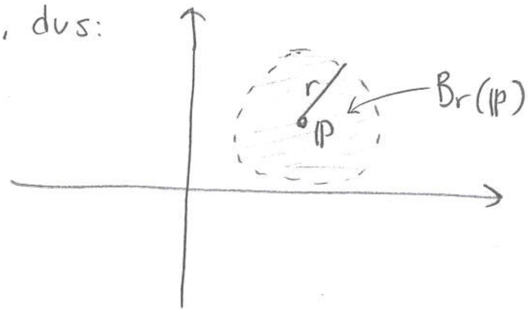
$\left.\begin{array}{l} \text{contour}(X,Y,Z) \\ \text{surfc}(X,Y,Z) \\ \text{meshc}(X,Y,Z) \end{array}\right\}$ plottar nivåkurvor

isosurface(X, Y, Z, V, c) plottar nivåytan $f(X,Y,Z)=c$
$(V = f(X,Y,Z))$

Gränsvärde

Definition: en omgivning $B_r(\mathbb{P})$ till punkten $\mathbb{P}$ är alla punkter som befinner sig strikt mindre än r ifrån $\mathbb{P}$, dvs:

$$B_r(\mathbb{P}) = \{ \mathbb{X} : |\mathbb{P} - \mathbb{X}| < r \}$$



Definition: gränsvärde för $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Vi säger att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

om:

(i) varje omgivning till (a,b) innehåller några punkter i $D(f)$ skilda från (a,b)

och

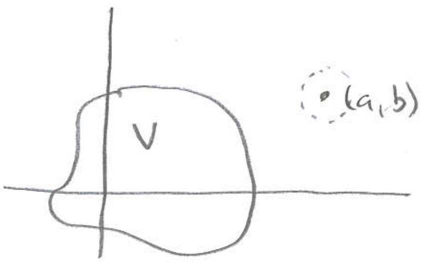
(ii) för alla $\varepsilon > 0$ kan ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ väljas så att alla punkter (x,y) som uppfyller

- $(x,y) \in D(f)$
- $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$ $\qquad ((x,y) \in B_\delta(a,b))$

också uppfyller:

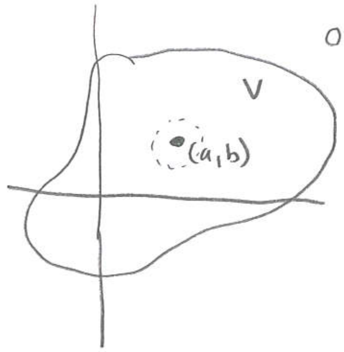
$$\boxed{|f(x,y) - L| < \varepsilon}$$

Ex) när (i) inte gäller



- om $D(f) = V \cup (a,b)$
  gäller inte (i), eftersom en liten cirkel (omgivning) kan väljas runt (a,b) som inte innehåller någon punkt i $D(f)$ förutom (a,b)

när (i) gäller



om $D(f) = V \setminus \{(a,b)\}$ så gäller (i) eftersom varje cirkel (omgivning) runt (a,b) innehåller punkter i $D(f)$

Ex) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ $\quad (x,y) \longrightarrow (0,0)$ $\quad \left(D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \right)$

Vi får $\longrightarrow$ "$\dfrac{0}{0}$"

Vi provar att gå in mot $(0,0)$ via olika kurver i $\mathbb{R}^2$:

1.) På x-axeln, dus: $y=0$, $x \to 0$

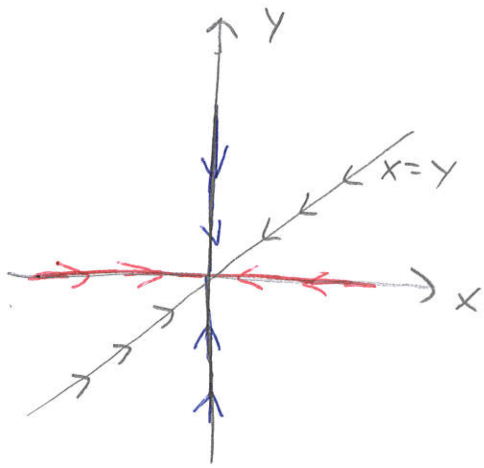
Vi får

$$f(x,0) = \frac{0}{x^2+0} = 0 \to 0 \quad \text{när } x \to 0$$

2. På y-axeln, dus: $x=0$, $y \to 0$

Vi får

$$f(0,y) = \frac{0}{0+y^2} = 0 \to 0 \quad \text{när } y \to 0$$



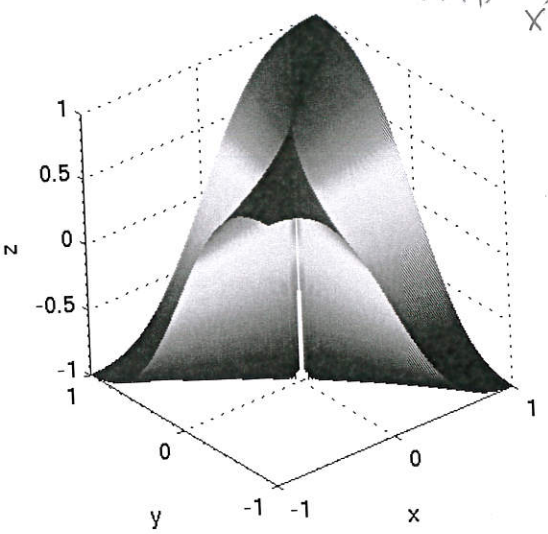
3. Linjen $x=y$, $y \to 0$

Vi får

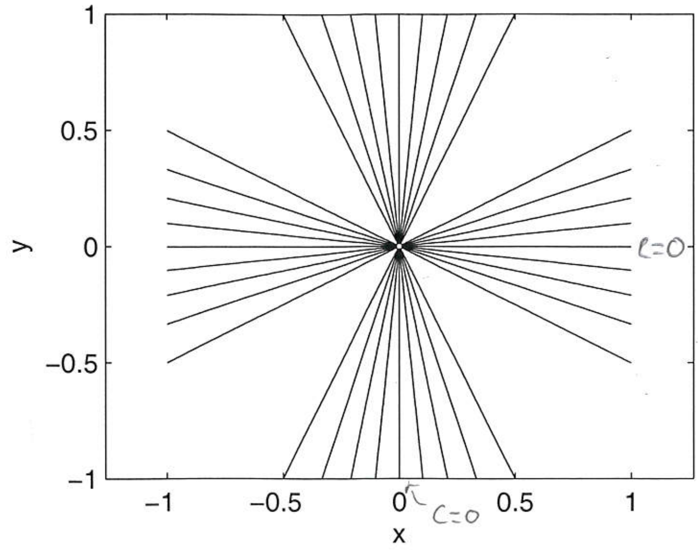
$$f(y,y) = \frac{2y^2}{2y^2} = 1 \to 1 \quad \text{när } y \to 0$$

Vi har vägar in till $(0,0)$ som ger olika gränsvärde $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{gränsvärdet existerar ej}}$

$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$



$f(x,y) = c$




```
[X, Y] = meshgrid(-1:0.01:1);
Z = 2 * X .* Y ./ (X .^2 + Y .^2);

surf(X, Y, Z)
shading interp
axis equal

figure
contour(X, Y, Z, -1:0.2:1)
axis equal
```

Det går att se från plotter att funktion beter sig konstigt nära (0,0).
Exempelvis syns på nivåkurvorna att olika nivåvärden (c) ger kurvor som går in mot (0,0).

Ex $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ $\quad D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Typ "$\frac{0}{0}$". Olika vägar in till (0,0) kommer alla ge 0.
Vi gissar då att $L=0$ och försöker visa det:

$$\underbrace{|f(x,y) - L|}_{\text{utgångspunkt}} = \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} |y| \leq |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

då $(x,y) \to (0,0)$

(Väljer vi $\delta = \varepsilon$ får vi för alla (x,y) med $|(x,y)-(0,0)| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$
att $|f(x,y) - L| \leq \dots \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$)

Prova att plotta $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ och dess nivåkurvor i Matlab.

METOD Beräkna/visa $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

1.) Prova olika vägar in till (a,b).
Om det blir olika gränsvärden $\Rightarrow$ gränsvärdet existerar ej
Annars gå till 2)

2) Om samma värde fås på de olika vägarna så existerar troligen gränsvärdet. Bevisa det.
exempelvis genom:

$$|f(x,y) - L| \leq \cdots \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \to 0 \text{ då } (x,y) \to (a,b)$$

Kontinuitet

Definition f är kontinuerlig i (a,b) om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Definition f är kontinuerlig (på $D(f)$) om f är kontinuerlig i varje punkt $(a,b) \in D(f)$.

Ex $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ är kontinuerlig på $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{om } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{om } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}^2$

Partiell derivata

Definition: de partiella derivatorna av $f(x,y)$ med avseende på x och y betecknas $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ och ges av

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \end{aligned}}$$

Ex: $f(x,y) = 2x^2y + y^2 + 2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2y$$

Beteckningar (finns en mängd varianter) $\quad z = f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = f_1' = f_x = f_x' = D_1 f = D_x f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = f_2' = f_y = f_y' = D_2 f = D_y f$$

Högre ordningens partiella derivator

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}_{\text{blandade}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Beteckningar: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} = f_{11}'' = f_{xx} = f_{xx}''$ osv

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} = f_{yx} = f_{yx}'' = \ldots$$

notera ordningen: för derivera map y, sen x

Ex: $f(x,y) = \sin x + xy^2 + x + 3$

$f_x' = \cos x + y^2 + 1 \qquad f_y' = 2xy$

$f_{xx}'' = -\sin x \qquad f_{yy}'' = 2x$

$f_{xy}'' = 2y \qquad f_{yx}'' = 2y$

notera

är $f_{xy}'' = f_{yx}''$ alltid?

SATS Blandade derivator är lika (utan bevis)

Antag $f^{(n)}_{\dots}$ och $f^{(n)}_{***}$ är n:te ordningens blandade partiella derivator av f i olika ordning men innehållande samma derivator.

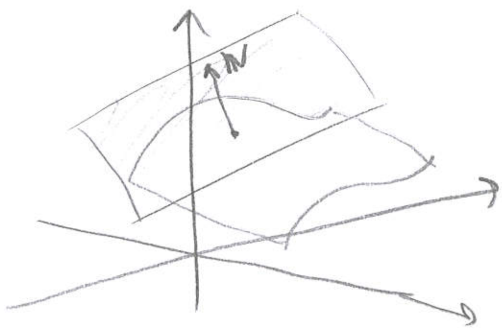
Om dessa två är kontinuerliga i punkten p och alla möjliga partiella derivator av lägre ordning ($<n$) är kontinuerliga i en omgivning av p,

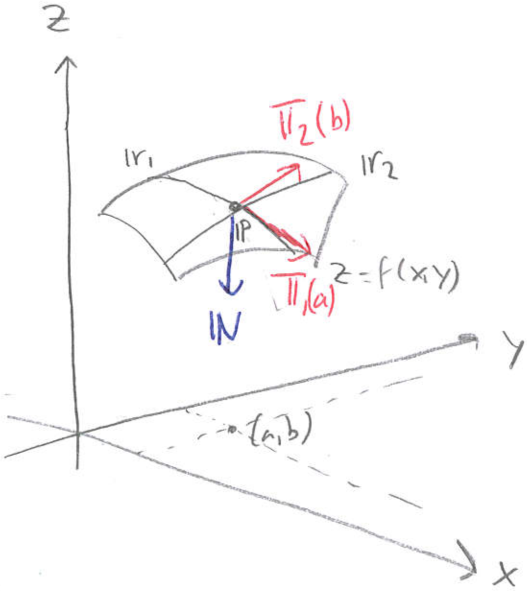
då är $f^{(n)}_{\dots}(p) = f^{(n)}_{***}(p)$

Tangentplan och normal till en graf $z = f(x,y)$

Givet en funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som ger en yta $z = f(x,y)$ i $\mathbb{R}^3$ ska vi för en punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ som ger en punkt $\mathbb{P} = (a, b, f(a,b)) \in \mathbb{R}^3$ på ytan räkna ut:

- normalen till ytan i $\mathbb{P}$
- tangentplanet till ytan i $\mathbb{P}$





Givet: $z = f(x,y)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$p = (a, b, f(a,b)) \in \mathbb{R}^3$

Vi parametriserar två kurvor på ytan:

$\mathbb{r}_1(x) = (x, b, f(x,b))$ (y konstant $= b$)

$\mathbb{r}_2(y) = (a, y, f(a,y))$ (x konstant $= a$)

Tangentvektorerna blir:

$$\begin{cases} \mathbb{T}_1 = \mathbb{r}_1'(x) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,b)\right) \\ \mathbb{T}_2 = \mathbb{r}_2'(y) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,y)\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{T}_1(a) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right) \\ \mathbb{T}_2(b) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) \end{cases}$$

$\longrightarrow$

$\Pi_1(a)$ och $\Pi_2(b)$ spänner upp tangentplanet och <u>normalen</u>

ges av:

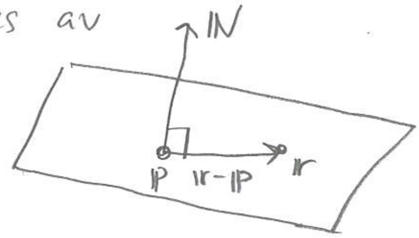
$$\boxed{\mathbb{N} = \Pi_2(b) \times \Pi_1(a) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & f_2'(a,b) \\ 1 & 0 & f_1'(a,b) \end{vmatrix} = \left(f_1'(a,b),\, f_2'(a,b),\, -1\right)}$$

Kvar: tangentplanets ekvation

Kom ihåg: ett plans ekvation givet en punkt $\mathbb{P}$ i planet och dess normal ges av

$$\mathbb{N} \circ (\mathbb{r} - \mathbb{P}) = 0$$

där $\mathbb{r} = (x,y,z)$



Vi sätter in

$$\mathbb{N} = (f_1'(a,b),\, f_2'(a,b),\, -1) \quad \text{och} \quad \mathbb{P} = (a, b, f(a,b))$$

och får:

$$(f_1'(a,b),\, f_2'(a,b),\, -1) \circ (x-a,\, y-b,\, z-f(a,b)) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{z = f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b)}$$ <u>Tangentplanet</u>

Ex | Partiella derivator

$f(x,y,y) = \sin(xy) + xyz$ Beräkna f'''_{xyz}.

$$f'_x = y\cos(xy) + yz, \quad f''_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy) + z$$

$$f'''_{xyz} = 1$$

Lite smartare (använd att ordningen inte spelar roll)

$$f'_z = xy \qquad f''_{zx} = y \qquad f'''_{zxy} = 1$$

Ex) Visa att $z = e^{kx}\cos(ky)$ $k \in \mathbb{R}$

uppfyller ekvationen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Lösn: $z'_x = k e^{kx}\cos(ky)$ $z''_{xx} = k^2 e^{kx}\cos(ky)$

$z'_y = -k e^{kx}\sin(ky)$ $z''_{yy} = -k^2 e^{kx}\cos(ky)$

$\Rightarrow$ $z''_{xx} + z''_{yy} = k^2 e^{kx}\cos(ky) + -k^2 e^{kx}\cos(ky) = 0$

$\underline{\underline{}}$