F4 26/3 - 18

Kedjeregeln

- En variabel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(g(x))$

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(g(x)) = g'(x)\, f'(g(x))}$$

- Flera variabler

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & f(x,y) \\ \text{där} & \\ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & x(t) \\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & y(t) \end{cases}$$

Låt $z(t) = f(x(t), y(t))$, kedjeregeln blir:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}} \qquad (*)$$

Notera: ∂ och d

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & f(x,y) \\ \text{där} & \\ x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & x(s,t) \\ y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & y(s,t) \end{cases}$$

Låt $z(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$, kedjeregeln blir:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}} \qquad (**)$$

Ex) $f(x,y) = x^2 + xy$

$x(t) = t+1$

$y(t) = \sin t$

$z(t) = f(x(t), y(t))$

Vi får:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (2x+y)\cdot 1 + x \cdot \cos t$$

$$= 2t+2 + \sin t + (t+1)\cos t$$

Jämför med: $z(t) = f(t+1, \sin t) = (t+1)^2 + (t+1)\sin t$

$$\frac{dz}{dt} = \left((t+1)^2 + (t+1)\sin t\right)' = 2(t+1) + \sin t + (t+1)\cos t$$

Ex) $f(x,y)$ där $x(r,\theta) = r\cos\theta$, $y(r,\theta) = r\sin\theta$

Låt $z(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$

Räkna ut $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$

Lösn:

Vi har inte $f(x,y)$ given så vi skriver bara $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1'$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = f_1' \cos\theta + f_2' \sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = f_1'(-r\sin\theta) + f_2' r\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(f_1'\cos\theta + f_2'\sin\theta\right) = \frac{\partial}{\partial r}(f_1')\cos\theta + \frac{\partial}{\partial r}(f_2')\sin\theta$$

$$= \left(\frac{\partial f_1'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f_1'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial f_2'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f_2'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\sin\theta$$

$$= (f_{11}''\cos\theta + f_{12}''\sin\theta)\cos\theta + (f_{21}''\cos\theta + f_{22}''\sin\theta)\sin\theta$$

$$= f_{11}''\cos^2\theta + 2f_{12}''\sin\theta\cos\theta + f_{22}''\sin^2\theta$$

Skissartad härledning av (*)

Vi har $z(t) = f(x(t), y(t))$ och vill räkna ut $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Inför beteckning:} \\ \Delta x = x(t+h) - x(t) \quad \Rightarrow \quad x(t+h) = x(t) + \Delta x \\ \Delta y = y(t+h) - y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t+h) = y(t) + \Delta y \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x(t)+\Delta x, y(t)+\Delta y) - f(x(t), y(t)+\Delta y)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{h} + \frac{f(x(t), y(t)+\Delta y) - f(x(t), y(t))}{\Delta y} \frac{\Delta y}{h} \right)$$

"Drar ifrån och lägger till"

Vad händer med varje faktor när $h \to 0$?

- $\frac{\Delta x}{h} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \to \frac{dx}{dt}$ när $h \to 0$

- $\frac{\Delta y}{h} = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \to \frac{dy}{dt}$ när $h \to 0$

Notera: Δx och $\Delta y \to 0$ när $h \to 0$ om x, y är kontinuerliga

- $\frac{f(x(t), y(t)+\Delta y) - f(x(t), y(t))}{\Delta y} \to \frac{\partial f}{\partial y}$ när $\Delta y \to 0$

- $\frac{f(x(t)+\Delta x, y(t)+\Delta y) - f(x(t), y(t)+\Delta y)}{\Delta x}$ ser ut att gå mot $\frac{\partial f}{\partial x}$ när $h \to 0$

["skissartat"]

Så vi får något som verkar bli:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Matrisnotation av (*) och (**)

(*): $$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$$

(**): $$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Deriverbarhet i flera variabler

Definition $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är partiellt deriverbar m.a.p. x resp. y om

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}}$$

resp.

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}}$$

existerar.

Definition $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är deriverbar i (a,b) om

$$\boxed{\lim_{\sqrt{h^2+k^2} \to 0} \frac{f(a+h,b+h) - f(a,b) - f_1'(a,b)h - f_2'(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0}$$

Är alla f som är partiellt deriverbara också deriverbara?
Nej.

Deriverbarhet är alltså ett starkare villkor än partiellt deriverbar.

→

5

Varför har begreppet deriverbarhet införts?

I en variabel gäller: f deriverbar $\Rightarrow$ f kontinuerlig

Men för flera variabler:

- f partiellt deriverbar $\not\Rightarrow$ f kontinuerlig

men med hjälp av det starkare begreppet, som då kallas deriverbarhet, får vi

- f deriverbar $\Rightarrow$ f kontinuerlig

Ytterligare fakta:

- f deriverbar $\Rightarrow$ f partiellt deriverbar

<u>SATS</u>: Om $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i en omgivning av (a,b) så är f deriverbar.

<u>SATS: Kedjeregeln</u>

Om den yttre funktionen är deriverbar och den inre är partiellt deriverbar

$\Rightarrow$ kedjeregeln gäller

<u>Ex</u>: en ej deriverbar funktion som är partiellt deriverbar

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

från Wikipedia "Differentiable function"

f är inte deriverbar i $(0,0)$ men $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existerar.

Vi visar först att de partiella derivatorna existerar:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0^3}{h^2-0^2} - 0}{h} = 0$$

$\rightarrow$

6

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1$$

Men deriverbar?:

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - f_1'(0,0)h - f_2'(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{k^3}{h^2+k^2} - 0 - 0 - k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \frac{\frac{k^3 - k(h^2+k^2)}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{-kh^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \longrightarrow ?$$

Vi undersöker två vägar in till (0,0):

- $k=0,\ h \to 0$

  $\Rightarrow \longrightarrow 0$

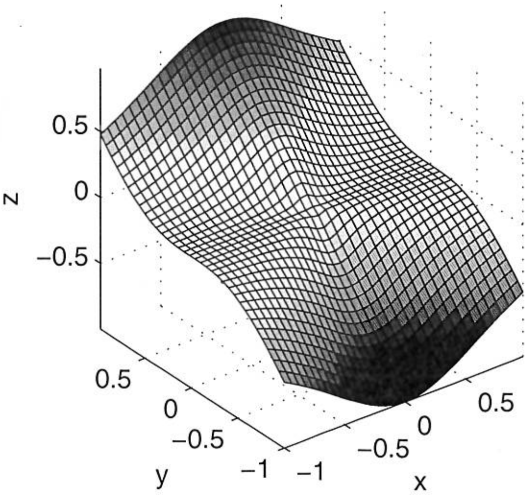
- $k=h,\ h\to 0$

  $\Rightarrow \frac{-h^3}{2h^2\sqrt{2h^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$

Två olika $\Rightarrow$ gränsvärde existerar ej

alltså ej deriverbar

$f(x,y)$




```
[X, Y] = meshgrid(-1:0.06:1);
Z = Y.^3 ./ (X.^2 + Y.^2);

surf(X, Y, Z)
axis equal
```

Ex

$$f(x,y) = \begin{cases} x & y \neq x^2 \\ 0 & y = x^2 \end{cases}$$

(från Wikipedia "Differentiable function")

Ett exempel där f är partiellt deriverbar men f ej är kontinuerlig.