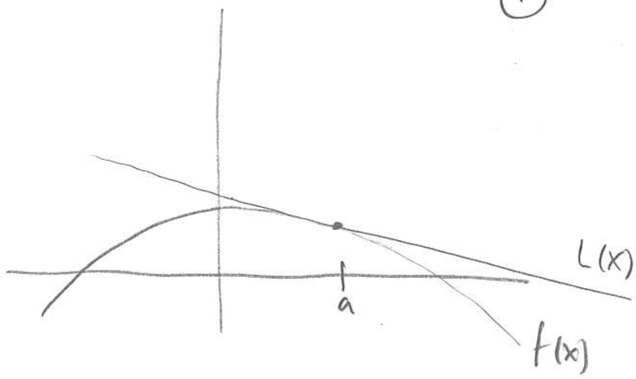
FS 27/3-18

Linjarisering



- I en variabel

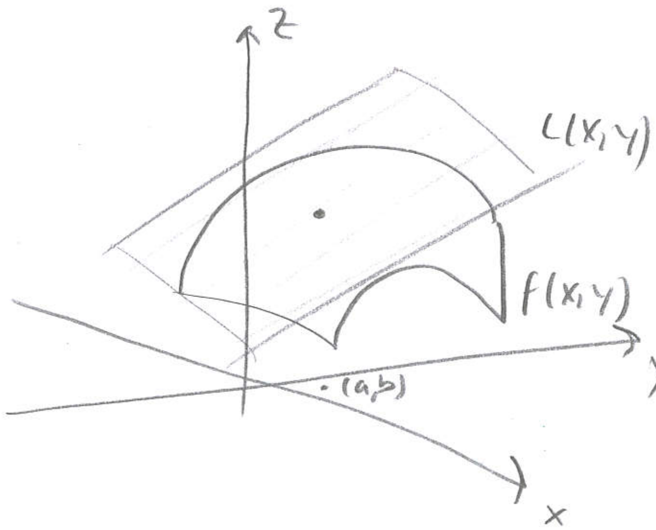
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Funktionen f uppskattas runt punkten $(a, f(a))$ med en linje.

- I två variabler

$$\boxed{L(x,y) = f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b)}$$

Funktionen f uppskattas runt punkten $(a, b, f(a,b))$ med ett plan.



Linjarisering används inom många områden, ofta för att studera olinjära problem genom att linjärisera dem.

Vektor- och matrisnotation

Genom att använda vektorer och matriser kan mycket inom flervariabelanalysen skrivas kompaktare och generellare.

Låt:

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m]^T \qquad \mathbf{a} = [a_1, \dots, a_m]^T$$

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{x})$$

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]'$$

↑ vi skriver ofta tunnt f för $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ också.

Notera: ovanstående vektorer är kolonnvektorer

Definition Jacobimatrisen Df (eller f') av $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definieras som:

$$\boxed{Df = f' = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} & n \\ m & \end{array}}$$

Ex Om $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ blir

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Ex $f(x,y) = \begin{bmatrix} y \sin x \\ x^2 y \end{bmatrix}$ ger $f' = \begin{bmatrix} y \cos x & \sin x \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix}$

Notera: om $m=1$, dvs $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, så blir $Df = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{df_n}{dx} \end{bmatrix}$

Nu skriver vi ner några resultat m.h.a den nya notationen.

Linjarisering

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbb{h} = \mathbb{x} - \mathbb{a}$

$$\boxed{L(\mathbb{x}) = f(\mathbb{a}) + Df(\mathbb{a})\,\mathbb{h}}$$

[ ]

[ ]

Deriverbarhet

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbb{h} = \mathbb{x} - \mathbb{a}$

f är deriverbar i $\mathbb{a}$ om

$$\boxed{\lim_{|\mathbb{h}| \to 0} \frac{f(\mathbb{x}) - f(\mathbb{a}) - Df(\mathbb{a})\,\mathbb{h}}{|\mathbb{h}|} = 0}$$

Kedjeregeln

$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^m$

Låt $\mathbb{b} = g(\mathbb{a})$

Om f och g är deriverbara i $\mathbb{b}$ respektive $\mathbb{a}$

då är $u = f \circ g$, dvs $u(\mathbb{x}) = f(g(\mathbb{x}))$, deriverbar i $\mathbb{a}$ och

$$\boxed{u'(\mathbb{a}) = f'(\mathbb{b})\, g'(\mathbb{a})}$$

$u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

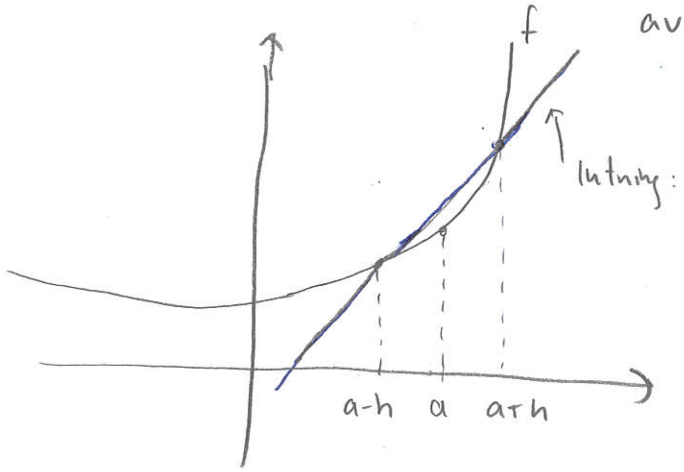
så u' är $\underbrace{p \times m}$ $\underbrace{p \times n \qquad n \times m}$

storlekarna stämmer

Notera: matriser så ordningen spelar roll $(AB \neq BA)$

Numerisk beräkning av Jacobimatrisen

Vi minns: $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ ← centraldifferens, bra numerisk uppskattning av derivata



lutning: $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

Ett element på plats (i,j) i Df, dvs $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, kan på liknande sätt approximeras enligt

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{f_i(\mathbf{a}+\delta \mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{a}-\delta \mathbf{e}_j)}{2\delta}}$$

där δ är ett litet tal och $\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ← plats j

Låt approximationen av Df betecknas J. Varje kolonn i J kan beräknas smidigt:

$$\boxed{\frac{f(\mathbf{x}+\delta \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}-\delta \mathbf{e}_j)}{2\delta}}$$

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{bmatrix} \approx Df(\mathbf{x})$$

kolonn j

Matlab

Skriv en funktion

Jacobi(f, x)

som tar in

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}^m \longleftarrow [\;]$

och räknar ut

$J(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Newtons metod

Givet $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (båda n nu)

Vi vill lösa

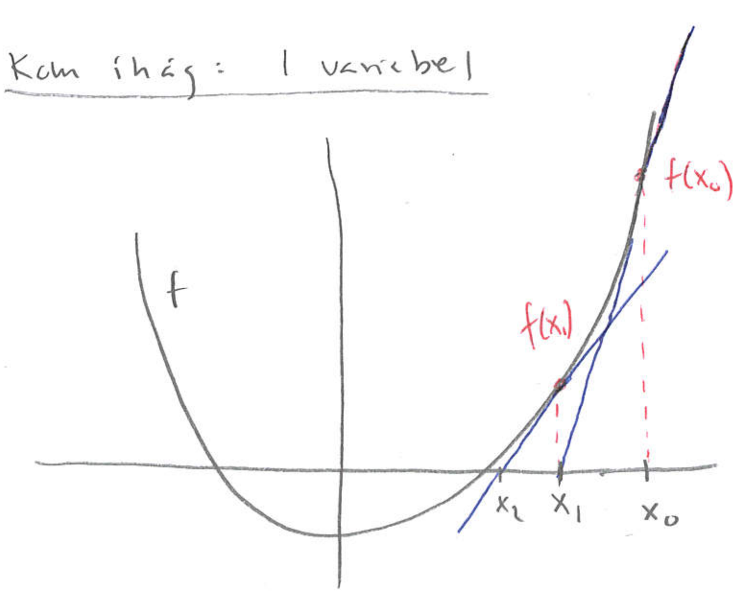
$$\boxed{f(x) = 0} \longleftarrow 0 \text{ ses som } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

alltså:
$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

(n obekanta, n ekvationer)

Detta vill vi lösa numeriskt med Newtons metod.

Kom ihåg: 1 variabel



- Sätt in $x_0 \Rightarrow f(x_0)$
- Hitta lutningen i $x_0 \Rightarrow f'(x_0)$
- Följ linjen $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ till $L(x_1) = 0$
- Sätt in $x_1 \Rightarrow f(x_1)$

$\vdots$

osv, upprepa tills tillräckligt nära

- I flera variabler

  - Startgissning $\mathbf{x}_0$
  - Linjarisera runt $\mathbf{x}_0$: $L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$ ← $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$
  - Lös $L(\mathbf{x}) = 0$, dvs $f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = 0$
  - Beräkna $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$

  Upprepa tills tillräckligt nära

Algoritm:

```
x = ...
tol= ...
h = ...
while |h|>tol
    h =-(f'(x))^-1 f(x)
    x = x+h
end
```

Relevanta frågeställningar:

- Kommer det konvergera?
- Existerar inversen $(f'(x))^{-1}$?

Matlab

Skriven en funktion

Newton(f, x0, tol)

som tar in

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x0 \in \mathbb{R}^n$ startgissning

$tol \in \mathbb{R}$ tolerans

och m.h.a Newtons metod räknar ut $x \in \mathbb{R}^n$ så att

$f(x) \approx 0$