F6 9/4-18

Kort repetition

Hur tolkar vi f'?

Det beror på vad f är, d.v.s., vad är m och n i $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

- För $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är f' "vanlig" derivata:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- För $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $n > 1$, får vi

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{df_n}{dx} \end{bmatrix}$$ ← 1 variabel, därför vanligt d

- För $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $m > 1$ får vi

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

- Och generellt $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, får vi Jacobimatrisen:

$$\boxed{f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}}$$

Kom ihåg partiell derivata:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}$$ där e_j är $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ← j:te platsen

Gradient

Def: gradienten av $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definieras som

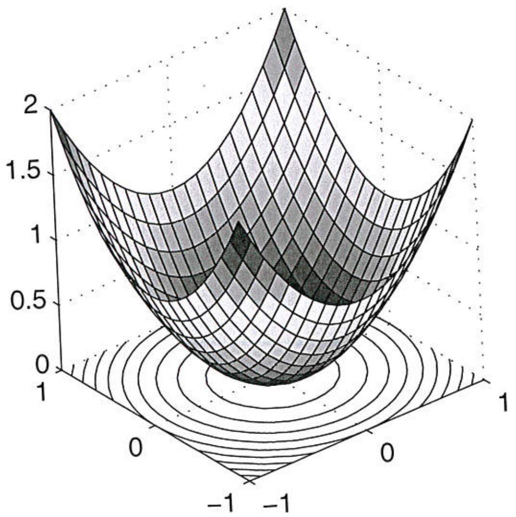
$$\boxed{\operatorname{grad} f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \ \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \ \ \cdots \ \ \frac{\partial f}{\partial x_m} \right]}$$

↑ vanligaste beteckningen

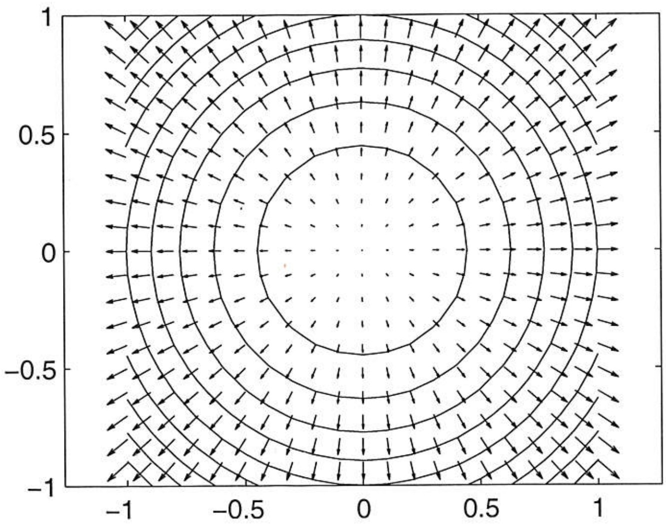
Notera: gradienten definieras för skalärvärda funktioner f.
∇f blir en vektorvärd funktion $\nabla f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

Ex] $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\nabla f = [2x \ \ 2y]$



Funktionsytan och nivåkurvor för $f(x,y) = x^2 + y^2$



Nivåkurvor och ∇f för $f(x,y) = x^2 + y^2$

Notera: vektorerna skalas automatiskt av Matlab. I detta fallet är de egentligen längre.

```
[X, Y] = meshgrid(-1:0.1:1);
Z = X.^2 + Y.^2;
U = 2 * X;
V = 2 * Y;

figure
surfc(X, Y, Z)
axis equal

figure
contour(X, Y, Z)
hold on
quiver(X, Y, U, V)
axis equal
```

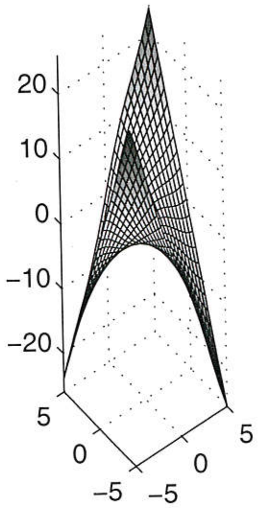
Ex] $f(x,y) = \sin x + xy$

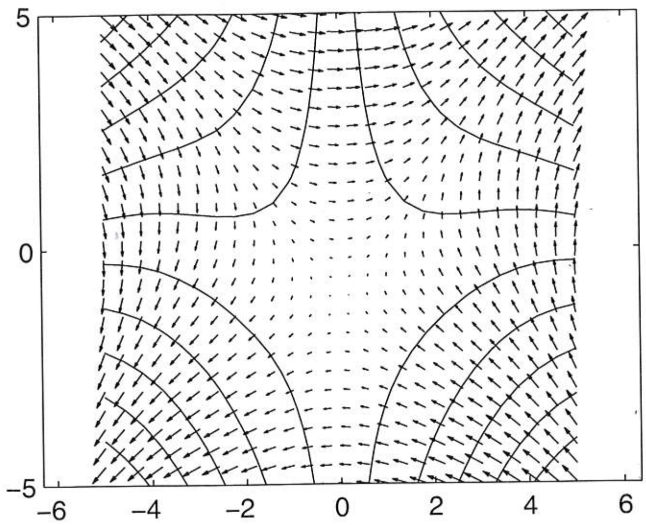
$\nabla f = [\cos x + y \quad x]$

```
[X, Y] = meshgrid(-5:0.4:5);
Z = sin(X) + X .* Y;
U = cos(X) + Y;
V = X;

figure
surf(X, Y, Z)
axis equal

figure
contour(X, Y, Z, 10)
hold on
quiver(X, Y, U, V)
axis equal
```





Påståenden om gradienten

- ∇f är vinkelrät mot nivåkurvorna (utom om $\nabla f = 0$)
- ∇f pekar i den riktning dit f växer snabbast

SATS

Om $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är deriverbar i (a,b) och $\nabla f(a,b) \neq 0$,
då är $\nabla f(a,b)$ en normalvektor till nivåkurvan till f genom (a,b).

Bevis: Låt $f(x,y) = C$ vara en nivåkurva som går igenom (a,b), dvs: $f(a,b) = C$.
Låt $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ vara en parametrisering av nivåkurvan så att $\mathbf{r}(0) = (a,b)$.

Derivera $f(x(t), y(t)) = C$

$\Rightarrow$

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f'_x x'(t) + f'_y y'(t) = [f'_x \quad f'_y] \cdot [x'(t) \quad y'(t)]$$

$$= \nabla f \cdot \mathbf{r}'(t)$$

$t=0$ ger $0 = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{r}'(0) \Rightarrow \nabla f(a,b) \perp \mathbf{r}'(0)$ ∎

Obs: vi använder kedjeregeln i beviset, det är därför f behöver vara deriverbar i (a, b).

Def Deriveringsoperatorn ∇ (nabla) definieras som vektorn:

$$\boxed{\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_m} \right]}$$

Genom att se ∇ som en vektor kan grad f ses som "∇ gånger f".

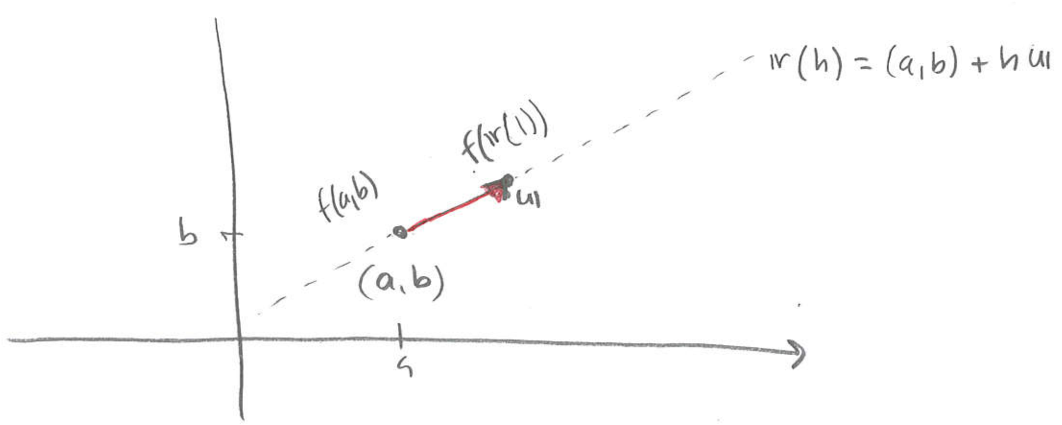
Mer om detta senare i kursen...

Riktningsderivata

$\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ beskriver hur f förändras när vi förflyttar oss i x- respektive y-riktningen.

Vi ska undersöka hur f förändras i en godtycklig riktning.

Låt $u = [u_1, u_2]$ vara normerad, dvs $|u| = 1$.



Def: Låt $|\mathbf{u}|=1$, riktningsderivatan av f i $\mathbf{u}$:s riktning i punkten (a,b) definieras som:

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+hu_1, a+hu_2) - f(a,b)}{h}$$

eller ekvivalent:

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tu_1, b+tu_2)\Big|_{t=0}.$$

Obs: $D_{\mathbf{u}} f(a,b)$ är ett tal till skillnad från ∇f som är en vektor.

Hur räknas $D_{\mathbf{u}} f$ ut på ett smidigt sätt?

SATS Om f är deriverbar i (a,b) gäller:

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a,b)}$$

(Kom ihåg att $\mathbf{u}$ måste vara normerad, dvs $|\mathbf{u}|=1$)

Bevis:

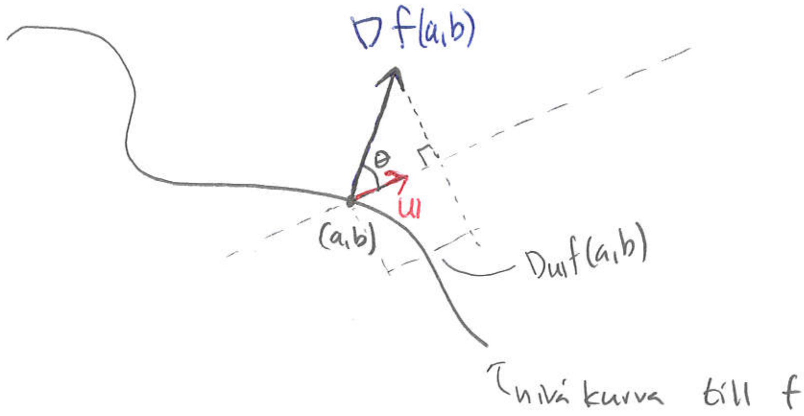
$$\frac{d}{dt} f(a+tu_1, b+tu_2) = [\text{kedjeregeln}] = f'_x(a+tu_1, b+tu_2)u_1$$

$$+ f'_y(a+tu_1, b+tu_2)u_2 = \nabla f(a+tu_1, b+tu_2) \cdot \mathbf{u}$$

$t=0$ ger

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tu_1, b+tu_2)\Big|_{t=0} = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{u}$$

Geometrisk tolkning av $D_u f$ och ∇f



$D_u f(a,b)$ är projektionen av $\nabla f(a,b)$ på u.

Vi har:

$$D_u f(a,b) \overset{\text{satsen}}{=} \nabla f(a,b) \cdot u \overset{\text{vinkelregel}}{=} \underbrace{|u|}_{=1} \, |\nabla f(a,b)| \cos\theta = |\nabla f(a,b)| \cos\theta$$

alltså:

$$D_u f(a,b) = |\nabla f(a,b)| \cos\theta$$

är som störst när $\cos\theta$ är som störst, alltså när $\cos\theta = 1 \implies \theta = 0$, dvs när u pekar i gradientens riktning.

Slutsats: gradienten ∇f är den riktning som f växer mest i.

Ex) Räkna ut riktningsderivatan av $f(x,y) = x^2y + x$ i riktningen $(1,2)$ i punkten $(1,1)$.

$$\nabla f = [2xy+1 \quad x^2], \quad \nabla f(1,1) = [3 \quad 1]$$

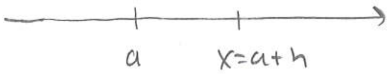
$$\bar{v} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

$$D_{\bar{v}} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \bar{v} = (3,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Taylors formel / polynom

(Vi studerar endast grad 2)

• I en variabel



Taylors formel: $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + R_2(a,h)$

med restterm $R_2(a,h) = \frac{1}{3!}f'''(s)h^3$ där $s \in [a, a+h]$

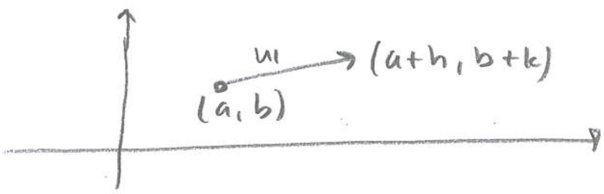
Taylorpolynom: $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$

(Notera: $x = a+h$, $h = x-a$)

> Taylorpolynom är en generalisering av linjärisering.
> Med linjärisering approximeras en funktion med en linje.
> Med Taylorpolynom approximeras en funktion med ett polynom.

• I två variabler

Vi har en utgångspunkt (a,b) och ska räkna ut f en bit bort i punkten $(a+h, b+k)$. $(\mathbf{u} = (h,k))$



Låt $F(t) = f(a+th, b+tk)$

då har vi $\begin{cases} F(0) = f(a,b) \\ F(1) = f(a+h, b+k) \end{cases}$

Taylors formel i en variabel ger oss

$$F(1) = F(0) + F'(0)\cdot 1 + \frac{1}{2}F''(0)\cdot 1^2 + \frac{1}{6}F'''(s)\cdot 1^3$$

där $s \in [0,1]$.

→

Vi räknar ut derivatorna $F'(t)$ och $F''(t)$.

- $F'(t) = \frac{d}{dt} f(a+th, b+tk) = [\text{Kedjeregeln}] =$

$$= f'_x(a+th, b+tk)h + f'_y(a+th, b+tk)k$$
$$= \nabla f(a+th, b+tk) \bullet u$$

- $F''(t) = \frac{d}{dt} F'(t) = f''_{xx}(\ldots,\ldots)h^2 + f''_{xy}(\ldots,\ldots)hk$
$$+ f''_{yx}(\ldots,\ldots)kh + f''_{yy}(\ldots,\ldots)k^2$$

Alltså får vi:

$$F'(0) = \nabla f(a,b) \bullet u$$

$$F''(0) = [h\ k] \begin{bmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} =$$

$$= f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2$$

$F'''(s)$ kan räknas ut på liknande sätt.

Vi har nu:

Taylorpolynomet av grad 2: $(x = a+h,\ y = b+k)$

$$\boxed{P_2(x,y) = f(a,b) + \underbrace{f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k}_{\text{samma som linjariseringen } L(x,y)} + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\right)}$$

Taylors formel:

$$\boxed{f(x,y) = P_2(x,y) + R_2(x,y)}$$

där

$$\boxed{R_2(x,y) = \frac{1}{6}F'''(s) = \frac{1}{6}\left(f'''_{xxx}h^3 + 3f'''_{xxy}h^2k + 3f'''_{xyy}hk^2 + f'''_{yyy}k^3\right)}$$

där alla derivator evalueras i en punkt $(a+sh, b+sk)$ $0 \le s \le 1$.

Kompakt och generellt har vi:

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x, a, h \in \mathbb{R}^m$, $x = a + h$

Taylors formel:

Transponat

$$\boxed{f(x) = f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} h^T f''(a) h + R_2(x)}$$

där

$$f''(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m}(a) \end{bmatrix}$$

(kallas Hessematrisen)