F7 10/4-18

Optimering

Syfte: hitta max/min av en funktion

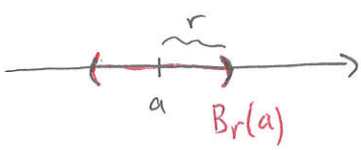
Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, f har

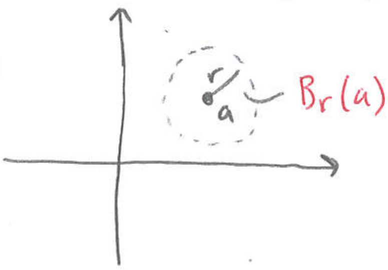
- lokalt maximum i a om
  $f(x) \leq f(a)$ i en omgivning av a
- globalt maximum i a om
  $f(x) \leq f(a)$ för alla $x \in D_f$
- lokalt/globalt minimum på liknande sätt ...

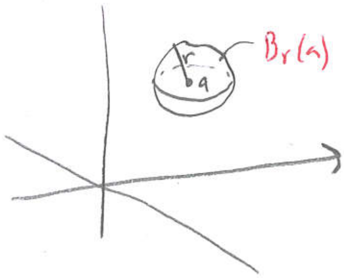
Def: a kallas extrempunkt om f har max/min i a

Def: $f(a)$ kallas extremvärde om a är en extrempunkt

Kom ihåg omgivning: $B_r(a) = \{x : |x-a| < r\}$

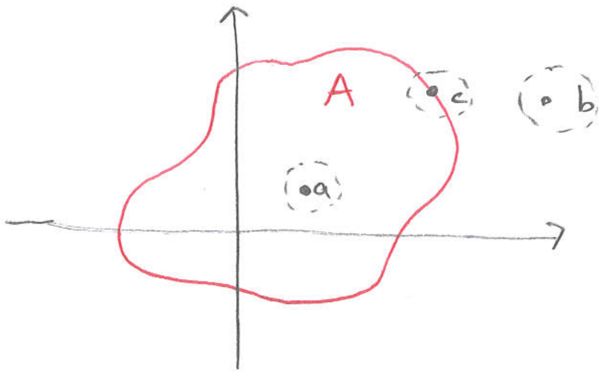
i $\mathbb{R}$: 

i $\mathbb{R}^2$: 

i $\mathbb{R}^3$: 

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a, b, c \in \mathbb{R}^n$

- a är en inre punkt till A om det finns en omgivning till a helt i A.
- b är en yttre punkt till A om det finns en omgivning till b helt utanför A.
- c är en randpunkt till A om varje omgivning till c innehåller punkter både i och utanför A.



Notera:

a inre punkt $\Rightarrow$ $a \in A$

a yttre punkt $\Rightarrow$ $a \notin A$

men en randpunkt tillhör nödvändigtvis inte A.

Ex: $A = [0,1]$

A:s inre punkter: $(0,1)$

A:s randpunkter: 0 och 1

Ex: $A = (0,1]$

A:s inre punkter: $(0,1)$

A:s randpunkter: 0 och 1

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är sluten (closed) om A innehåller alla sina randpunkter.

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är öppen (open) om den inte innehåller någon av sina randpunkter.

Ex!

$A = [0,1]$ sluten eftersom $\partial A = \{0,1\} \subseteq A$ ← A:s randpunkter

$A = (0,1]$ varken öppen eller sluten eftersom $0 \notin A$ men $1 \in A$

Ex! $A = \{x : |x-a| < r\}$

$\partial A = \{x : |x-a| = r\}$

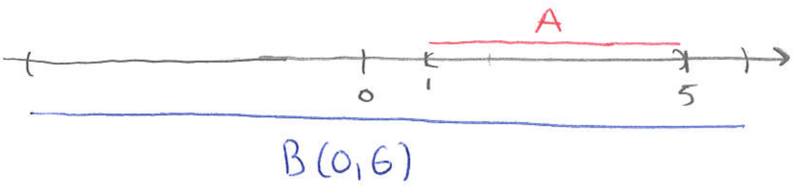
Inga punkter i ∂A ligger i $A \Rightarrow A$ öppen

- $A = \{x : |x-a| \leq r\}$, $\partial A = \{x : |x-a| = r\} \subseteq A \Rightarrow A$ sluten

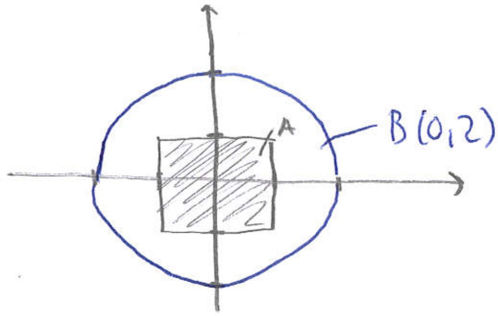
- $A = \mathbb{R}^n$, $\partial A = \{\emptyset\}$, dvs $\mathbb{R}^n$ har inga randpunkter så $\mathbb{R}^n$ både innehåller alla sina randpunkter samtidigt som $\mathbb{R}^n$ inte innehåller någon av sina randpunkter $\Rightarrow \mathbb{R}^n$ både öpen och sluten

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är begränsad om det finns $R \in \mathbb{R}$ så att $A \subset B(0,R)$

Ex • $A = (1,5) \subset B(0,6) \Rightarrow A$ begränsad



• $A = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\} \subset B(0,2) \Rightarrow A$ begränsad



• $A = \{x : x \geq 0\}$ ej begränsad

• $A = \{(x,y) : y = x\}$ ej begränsad

Def: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är begränsad om V_f är begränsad

(Dvs $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in D_f$)

Ex) $f(x) = x^2 \quad D_f = \mathbb{R}$ ej begränsad

$f(x) = \cos x$ är begränsad

$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad D_f = [0, \infty)$ är begränsad

$f(x) = \frac{1}{x} \quad D_f = (0, \infty)$ ej begränsad

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$

- a är en kritisk punkt för f om $f'(a) = 0$
- a är en singulär punkt för f om $f'(a)$ ej existerar
- en kritisk punkt som inte är en extrempunkt kallas sadelpunkt

---

Hitta extrempunkter/-värden (dvs max/min)

- Var/hur hitter vi extrempunkter?
- Hur vet vi att en punkt är en extrempunkt?
- När vet vi att det finns extrempunkter?

SATS (Nödvändigt villkor för extrempunkt)

Om $a \in \mathbb{R}^n$ är en extrempunkt till $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gäller att a är minst en av följande:

i) kritisk punkt till f

ii) singulär punkt till f

iii) randpunkt till f

Bevis

Låt a vara en punkt som inte uppfyller i), ii) eller iii).

Då vet vi:

a är en inre punkt med $f'(a) \neq 0$.

För att visa satsen ska vi visa att ett sådant a inte kan vara en extrempunkt.

Motsägelsebevis: antag att a är en extrempunkt.

Låt $h \in \mathbb{R}^n$ och studera envariabelfunktionen

$$g(t) = f(a + th)$$

$\longrightarrow$

Eftersom a är en extrempunkt måste

$$g'(0) = 0 \quad \text{för alla } h$$

d.v.s

$$0 = g'(0) = [\text{kedjeregeln}] = f'(a) \cdot h \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Men eftersom $f'(a) \neq 0$ kan $f'(a) \cdot h = 0$ inte uppfyllas för alla h $\Rightarrow$ MOTSÄGELSE.

$\Rightarrow$ a är ingen extrempunkt $\blacksquare$

Satsen ovan ger oss info om var vi ska leta efter extrempunkter, vi behöver bara leta bland:

- kritiska punkter
- singulära punkter
- randpunkter

Notera: om en punkt är någon av ovanstående tre typer betyder det inte att punkten är en extrempunkt.

SATS (tillräckligt villkor för extrempunkt)

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och $D_f \subset \mathbb{R}^n$ är sluten och begränsad

då finns punkter i D_f som har globala max och min.

Ovanstående sats ger oss när vi kan veta att det finns extrempunkter.

<u>Ex</u> $f(x) = x^2$ $\quad D_f = [-2,2]$

f är kontinuerlig och D_f är sluten och begränsad.

$\Rightarrow$ Det finns globalt max och min.

max: $x=-2$ och $x=2$ $\Rightarrow f(\pm 2) = 4$

min: $x=0$ $\Rightarrow f(0) = 0$

<u>Ex</u> $f(x) = x$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

D_f ej begränsad $\Rightarrow$ vi kan inte använda satsen

(vi vet dock att det inte finns något globalt max/min ty $f(x) \to \pm\infty$ när $x \to \pm\infty$)

<u>Ex</u> $f(x) = \sin x$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

D_f ej begränsad $\Rightarrow$ vi kan inte använda satsen

(vi vet dock att f har max$=1$ och min$=-1$)

<u>Ex</u> $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D_f = (0,1]$

D_f ej sluten $\Rightarrow$ vi kan inte använda satsen

(min$=1$, max finns ej ty $f \to \infty$ när $x \to 0$)