F8 12/4-18

Optimering fortsättning

Sen tidigare: vi vill hitta max/min av f på D_f. d.v.s. vi vill hitta extrempunkter. Vi vet sen sist att vi ska leta bland:

- kritiska punkter
- singulära punkter
- randpunkter

Idag: hur avgör vi om en kritisk punkt är max-, min-, eller sadelpunkt?

Vi studerar f''.

Först några definitioner:

Def: För $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kallas f'' Hessematrisen och den ges av:

$$f'' = \begin{bmatrix} f''_{11} & \cdots & f''_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1} & \cdots & f''_{nn} \end{bmatrix}$$

(För normala f är $f''_{ij} = f''_{ji} \Rightarrow f''$ är symmetrisk)

Def: Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara symmetrisk och $x \in \mathbb{R}^n$, funktionen $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definierad som

$$g(x) = \boxed{x^T A x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{nn} x_n^2$$

kallas en kvadratisk form.

Def $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisk, $x \in \mathbb{R}^n$

- A är positivt definit om $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$
- A är positivt semidefinit om $x^T A x \geq 0 \quad \forall x$
- A är indefinit om det finns $x, y \in \mathbb{R}^n$ så att

  $x^T A x < 0$ och $y^T A y > 0$.

(negativt definit / semidefinit definieras liknande)

SATS

Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara symmetrisk och $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vara A:s egenvärden

- Alla $\lambda_i > 0 \iff A$ pos. def.
- Alla $\lambda_i < 0 \iff A$ neg. def.
- $\lambda_i < 0, \lambda_j > 0 \iff A$ indefinit
- Alla $\lambda_i \geq 0 \iff A$ pos. semidef.
- Alla $\lambda_i \leq 0 \iff A$ neg. semidef.

Nu har vi tillräckligt för att bestämma en extrempunkts typ.

SATS (andra-derivata-testet)

Låt $a \in D_f$ vara en inre kritisk punkt till f. Antag att Hessematrisen är kontinuerlig.

Då gäller:

(i) $f''(a)$ pos. def $\implies$ lokalt min i a

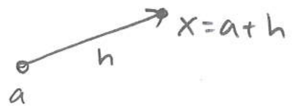
(ii) $f''(a)$ neg. def. $\implies$ lokalt max i a

(iii) $f''(a)$ indefinit $\implies$ a sadelpunkt

Notera: semidefinit ger ingen info

Bevis:

$x, a, h \in \mathbb{R}^n$



Taylors formel grad 1:

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2} h^T f''(a+sh)h \qquad s \in [0,1]$$

Eftersom a är en kritisk punkt har vi $f'(a) = 0$, så vi får

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\tfrac{1}{2} h^T f''(a+sh)h}_{(*)}$$

Så i en omgivning av a har vi att $f(x)$ är $f(a)$ plus $(*)$

Vi vet följande om $(*)$ i de tre olika fallen:

(i) $(*) > 0 \quad \forall h \neq 0$ eftersom $f''(a)$ pos. def.

(ii) $(*) < 0 \quad \forall h \neq 0$ eftersom $f''(a)$ neg. def.

(iii) $(*) < 0$ för några h och $(*) > 0$ för några h eftersom $f''(a)$ är indefinit.

$\Longrightarrow$

(i) $f(x) \geq f(a)$ i en omgivning av a $\Rightarrow$ lokalt min

(ii) $f(x) \leq f(a)$ i en omgivning av a $\Rightarrow$ lokalt max

(iii) ej lokalt max eller min $\Rightarrow$ sadelpunkt

Notera Att vi kan säga att $h^T f''(a+sh)h$ är >0 eller <0 baserat på att $f''(a)$ pos def/neg def/indef beror på att f'' är kontinuerlig.

(Om $g(t) > 0$ och g är kontinuerlig går det att välja ett litet Δt så att $g(t+\Delta t) > 0$)

METOD: Bestämma kritisk punkt a:s typ

1. Räkna ut Hessematrisen $f''(x)$
2. Bestäm egenvärdena för $f''(a)$

(egenvärdena λ till A ges av $\det(A-\lambda I)=0$)

Ex $f(x,y) = x^2+y^2 \quad a=(0,0)$

1. $f'(x,y) = [2x \quad 2y] \qquad f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. $f''(a) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(f''(a)-\lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \overset{>0}{\Rightarrow} a \text{ lokalt min}$$

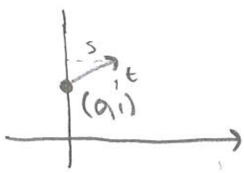
Ex $f(x,y) = x^2y^3 \quad a=(0,1)$

1. $f'(x,y) = [2xy^3 \quad 3x^2y^2] \qquad f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{bmatrix}$

2. $f''(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{semidefinit} \Rightarrow \text{satsen ger ingen info}$$

Vi kan analyser typen ändå:



$$f(s, 1+t) = \underbrace{s^2}_{\geq 0} \underbrace{(1+t)^3}_{\substack{\geq 0 \\ \text{om } t \text{ litet}}} \geq 0 = f(0,1) \quad \text{om } t \text{ litet}$$

$\Rightarrow$ a lokalt min.

METOD Bestämma max/min för f på ett begränsat område D

1. Hitta alla kritiska inre punkter i D $(f'(x)=0)$
2. Hitta alla singulära punkter i D.
3. Hitta alla extrempunkter på D:s rand (∂D).
4. Jämför värdet av f i alla punkter från 1, 2 och 3.

INRE METOD Hitta alla extrempunkter på ∂D

3a) Parametrisera randen ∂D (i flera olika delar om det behövs)

3b) Använd METOD steg 1-3 ovan på ∂D (på de olika delarna om ∂D delats upp)

Ex $f(x,y) = xy + x + y$

1. $f' = \begin{bmatrix} y+1 & x+1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (x,y) = (-1,-1)$ ligger ej i D

2. Finns inga

3. a) $\mathbf{r}_1(t) = (t, 0)$ $\quad 0 \le t \le 3$

$\mathbf{r}_2(t) = (0, t)$ $\quad 0 \le t \le 4$

$\mathbf{r}_3(t) = (3-3t, 4t)$ $\quad 0 \le t \le 1$

b) För $\mathbf{r}_1$

1. $f(\mathbf{r}_1(t)) = f(t,0) = t$, $f'(t,0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ inga kritiska punkter
2. Inga
3. Randpunkter: $(0,0)$ och $(3,0)$

För $\mathbf{r}_2$

1. $f(\mathbf{r}_2(t)) = f(0,t) = t$, $f' = 1 \neq 0 \Rightarrow$ inga kritiska punkter
2. Inga
3. Randpunkter: $(0,0)$ och $(0,4)$

$\longrightarrow$

$\rightarrow$ <u>För $\mathbf{r}_3$</u>

1. $f(\mathbf{r}_3(t)) = f(3-3t, 4t) = (3-3t)4t + (3-3t) + 4t$

   $f'(\mathbf{r}_3(t)) = 12 - 24t - 3 + 4 = 13 - 24t = 0 \implies t = \frac{13}{24}$

   $t = \frac{13}{24} \in [0,1] \implies$ ger oss kritisk punkt $\mathbf{r}_3(\frac{13}{24}) = (3 - \frac{13}{8}, \frac{13}{6})$

   $= (\frac{11}{8}, \frac{13}{6})$

2. Inga.

3. Randpunkter: $(3,0)$ och $(0,4)$

4. Vi har hittat följande punkter:

   $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,4)$ och $(\frac{11}{8}, \frac{13}{6})$

$$\left.\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(3,0) &= 3 \\ f(0,4) &= 4 \\ f(\tfrac{11}{8}, \tfrac{13}{6}) &= \tfrac{313}{48} > 4 \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} \min = 0 \\ \max = \frac{313}{48} \end{cases}$$