F9 16/4-18

## Optimering - sista delen

### Allmänt optimeringsproblem:

$$\boxed{\max_{x \in D} f(x)} \qquad \left(\text{och/eller} \quad \min_{x \in D} f(x)\right)$$

Betrakta området vi optimerar över: $D$

- Vi har tittat på $D = \mathbb{R}^n$ men också vissa fall där $D$ är andra mängder, exempelvis trianglar.
- Vi ska avsluta med att titta på områden $D$ som går att skriva på formen

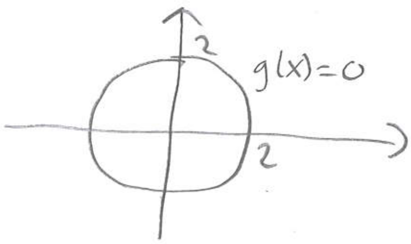
$$\boxed{g(x) = 0}$$

Dvs: $D = \{x : g(x) = 0\}$

---

Ex) $D$: $x^2 + y^2 = 4$ (cirkeln med radie 2 centrerad i origo)

ger $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$




---

Vi ska studera en välkänd metod för att lösa problem av typen:

$$\boxed{\text{maximera/minimera } f(x) \text{ under } \underline{\text{bivillkoret}} \ g(x) = 0}$$

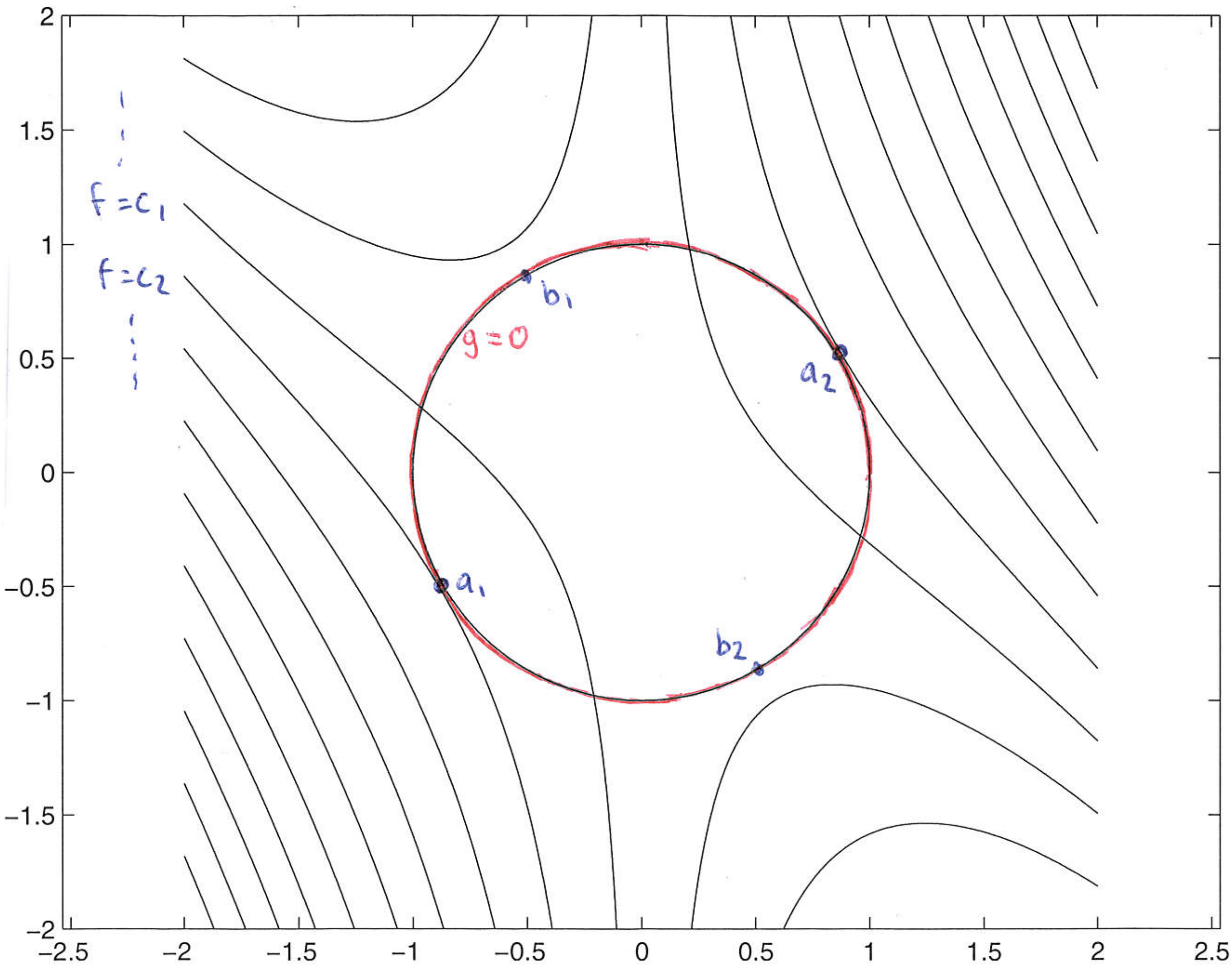
Metoden kallas <u>Lagranges multiplikatormetod.</u>

# Grafisk motivering till Lagranges multiplikatormetod

Vi har en funktion $f(x)$ som ska maximeras/minimeras över området $g(x)=0$.

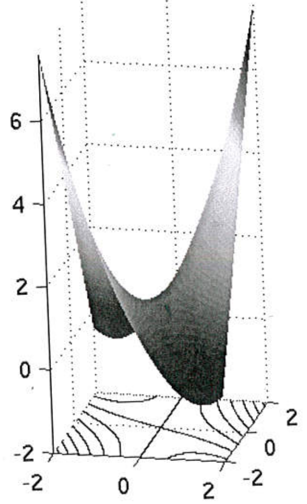
## Grafisk motivering – variant 1

Vi skissar $g(x)=0$ och nivåkurvorna för $f$.




Exempel med

$$\begin{cases} g(x,y) = x^2+y^2-1 \\ f(x,y) = x^2+\cos x + xy \end{cases}$$




```
[X, Y] = meshgrid(-2:0.01:2);

G = X.^2 + Y.^2 - 1;
Z = X.^2 + cos(X) + X.*Y;

contour(X, Y, G, [0 0])
axis equal
hold on
contour(X, Y, Z, 12)

figure
surfc(X,Y,Z)
axis equal
shading interp
```

→

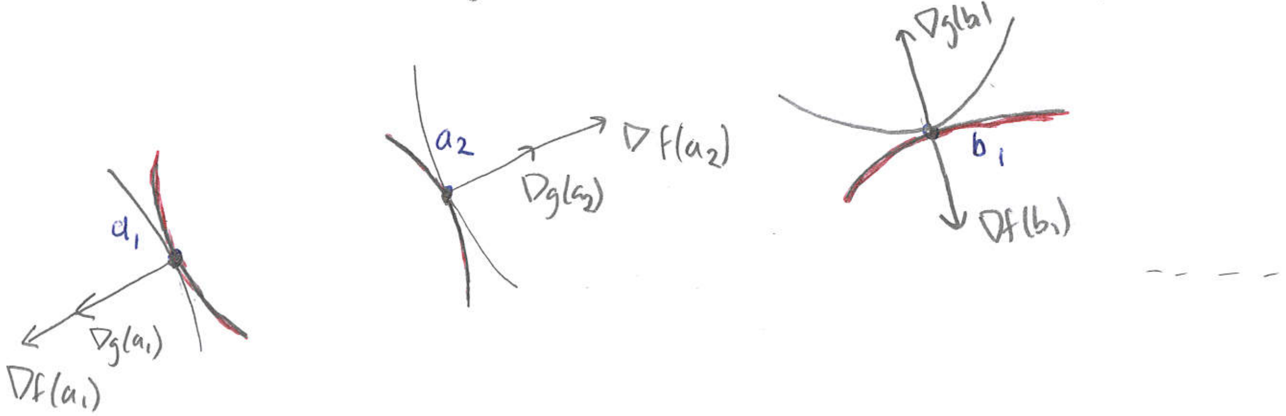
→

- Jämför nivåkurvorna för $f$ i stora plotten med funktionsytan för $f$ i lilla plotten för att förstå hur $f$ växer.

- Vi ser att det kommer vara maxvärden för $f$ på $g$ vid $a_1$ och $a_2$.

- På liknande sätt ser vi att det kommer vara minvärden vid $b_1$ och $b_2$.

- Nu studerar vi $\nabla g$ och $\nabla f$ i dessa fyra punkter:




- Vi ser att

$$\nabla f(a_1) \parallel \nabla g(a_1) \qquad \nabla f(a_2) \parallel \nabla g(a_2) \quad - - - -$$

↑ parallella

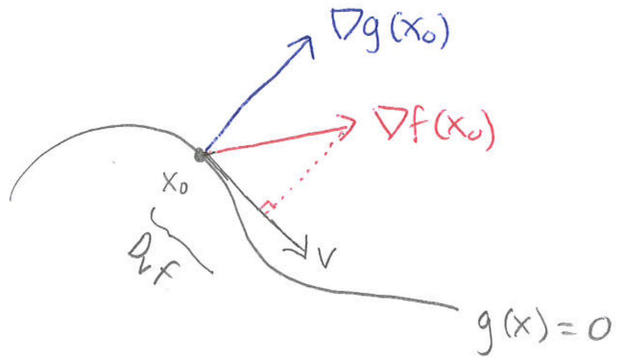
- Det verkar alltså som om $\nabla g$ och $\nabla f$ är parallella i extrempunkterna.

Slutsats: för att lösa max/min $f(x)$ under $g(x)=0$ ska vi leta upp punkter som uppfyller

- $g(x)=0$ ← punkten måste ligga på $g(x)=0$
- $\nabla f = -\lambda \nabla g$ ← $\nabla f \parallel \nabla g$, dvs $(-\lambda)$ gånger $\nabla g$ ger $\nabla f$

## Grafisk motivering – variant 2

Studera en punkt $x_0$ med $g(x_0)=0$ och skissa $\nabla f(x_0)$, $\nabla g(x_0)$ och tangenten $v$ till $g(x_0)$.




Vi ser att $D_v f(x_0) = v \cdot \nabla f(x_0)$ blir $> 0$

Så flyttar vi oss lite på kurven $g(x)=0$ i $v$:s riktning kommer $f(x_0+\delta v) > f(x_0)$. Därmed kan inte $x_0$ vara en extrempunkt.

Om däremot $\nabla g \perp \nabla f$ blir $D_v f = 0$.

---

**METOD:** Lagranges multiplikatormetod

Hitta max/min till $f(x)$ under bivillkoret $g(x)=0$.

1. Sätt upp funktionen $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x)$
2. Derivera $L(x,\lambda)$
3. Lös $L'(x,\lambda) = 0$
4. Jämför $f(x)$ för punkterna från 3.

Ex $f(x,y) = xy$ på $x^2 + y^2 = 1$

1.) $L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2+y^2-1)$

2.) $L' \begin{cases} L'_x = y + 2\lambda x & (*) \\ L'_y = x + 2\lambda y & (**) \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 & (***) \end{cases}$

3.) $L' = 0$

- Vi ser att $\underline{x, y \neq 0}$ eftersom $x = 0$ i $(*)$ ger $y = 0$ vilket inte går i $(***)$

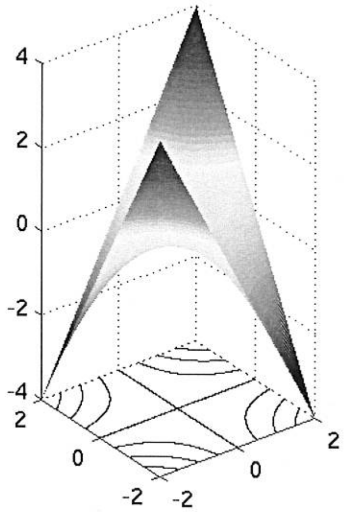
- Lös ut $\lambda$ i $(*)$ och $(**)$:

$$\lambda = \frac{-y}{2x} \qquad \lambda = \frac{-x}{2y} \Rightarrow \frac{-y}{2x} = \frac{-x}{2y} \Rightarrow \underline{x^2 = y^2}$$

- $x^2 = y^2$ i $(***)$ ger $2x^2 = 1 \Rightarrow \underline{x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \underline{y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Vi får punkterna

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (fyra stycken)




4.) $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1}{2}$

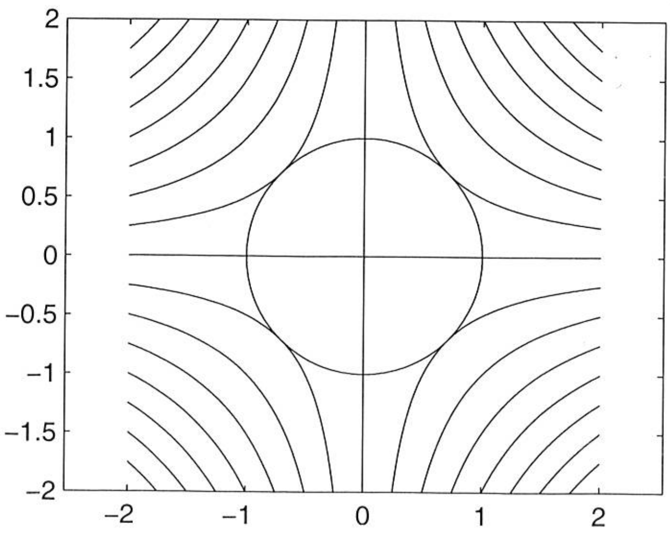
Svar: $\begin{cases} \max = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \min = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

```
[X, Y] = meshgrid(-2:0.01:2);

G = X.^2 + Y.^2 - 1;
Z = X.*Y;

contour(X, Y, G, [0 0])
axis equal
hold on
contour(X, Y, Z, 15)

figure
surfc(X,Y,Z)
axis equal
shading interp
```



Ex $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ under $xyz = V$
← en konstant

1.) $L(x,y,z,\lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V)$

2.) $$L' = \begin{bmatrix} y + 2z + \lambda yz \\ x + 2z + \lambda xz \\ 2x + 2y + \lambda xy \\ xyz - V \end{bmatrix}$$

3.) $L' = 0$

- Notera $x,y,z \neq 0$
- Lös ut $\lambda$ i första 3 ekvationerna ger

$$-\lambda = \frac{y+2z}{yz} = \frac{x+2z}{xz} = \frac{2x+2y}{xy}$$

- $\dfrac{y+2z}{yz} = \dfrac{x+2z}{xz} \Rightarrow \underline{x = y}$
- 4:e ger $\underline{z = \dfrac{V}{x^2}}$
- Till slut får vi $\begin{cases} x = y = \sqrt[3]{2V} \\ z = 2^{2/3}\sqrt[3]{V} \end{cases}$

4.) Vi har bara en punkt som är minimum (varför?)

```
[X, Y, Z] = meshgrid(0:0.1:2);

V = 1/2;
G = X .* Y .* Z;
F = X .* Y + 2 * X .* Z + 2 * Y .* Z;

isosurface(X, Y, Z, G, V)
isosurface(X, Y, Z, F, 2)
isosurface(X, Y, Z, F, 5)
axis equal
grid on
colorbar

figure
slice(X,Y,Z,F, 1, 1, 1/2)
hold on
isosurface(X, Y, Z, G, V)
axis equal
colorbar
```

SATS Lagranges multiplikatormetod

Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara deriverbara.

Antag att $x_0 \in \mathbb{R}^n$ är en extrempunkt till $f$ under bivillkoret $g(x) = 0$, och att $g'(x) \neq 0$.

Då finns ett tal $\lambda_0$ så att

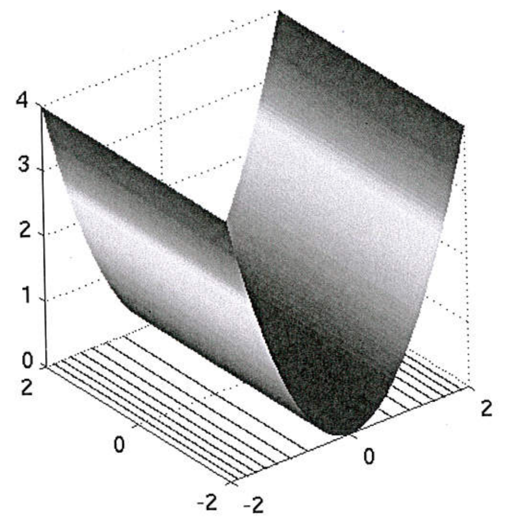
$$L'(x_0, \lambda_0) = 0.$$

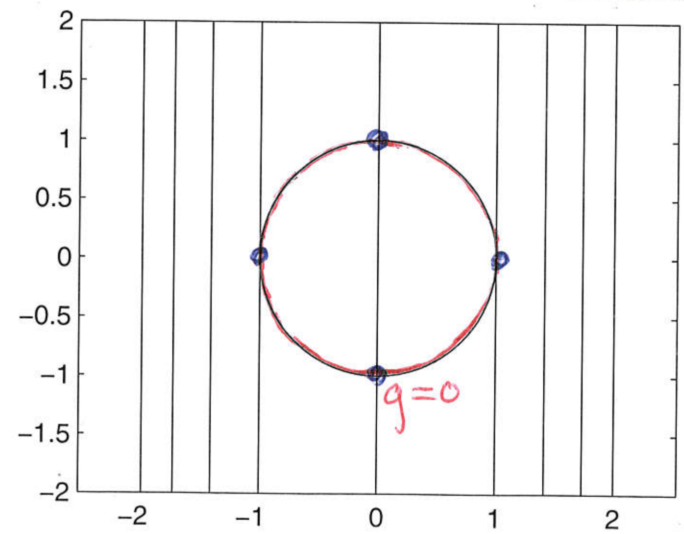
Bevis (skissartat baserat på tidigare grafiska motiveringar)

$$L' = \begin{bmatrix} f_1'(x) + \lambda g_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) + \lambda g_n'(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{dvs:} \quad \begin{cases} g(x) = 0 \\ \text{och} \\ f'(x) = -\lambda g'(x) \end{cases}$$

vilket är precis det vi grafiskt studerat tidigare. ☐

Ex $f(x,y) = x^2 \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$




```
[X, Y] = meshgrid(-2:0.01:2);

G = X.^2 + Y.^2 - 1;
Z = X.*X;

contour(X, Y, G, [0 0])
axis equal
hold on
contour(X, Y, Z, [0 1 2 3 4])

figure
surfc(X,Y,Z)
axis equal
shading interp
```

Vi ser att vi har max i $(-1,0)$ och $(1,0)$. Där är $\nabla f \parallel \nabla g$.

Men vi har ju också min i $(0,1)$ och $(0,-1)$. Vad händer där? Är

$$\nabla f = -\lambda \nabla g$$

verkligen uppfyllt, eller kommer Lagranges metod missa sådana punkter?

$\nabla f = 0$ så $\lambda = 0$ ger lösning, dvs Lagranges metod hittar dessa.

# Sammanfattning: optimeringsproblem

## Grundproblem

$$\max_{D \subseteq \mathbb{R}^n}/\min f(x)$$

Dvs: hitta extremvärden för $f(x)$ på området $D$

## Var letar vi?

- Kritiska punkter ($f' = 0$)
- Singulära punkter ($f'$ existerar ej)
- Randpunkter (på $\partial D$)

## Hur vet vi typen hos en inre kritisk punkt?

Undersök $f''(a)$: pos./neg. def. / indefinit

$\cup$ min, $\cap$ max, indefinit: sadel

$$\left( \det(f''(a) - \lambda I) = 0 \right)$$

## Ränder (lurigaste biten)

- Om $D$ är obegränsad, kolla vad som händer när $|x| \to \infty$
- Parametrisera randen $\Rightarrow$ $\mathbf{r}(t)$ och hitta kritiska punkter där

## Om $D = \{x : g(x) = c\}$

- Använd Lagranges multiplikatormetod.

# Matlab: optimering

Problem: hitta max/min till f(x) på $\mathbb{R}^n$

## 1.) Skaffa uppskattning om var extrempunkterna är

Använd: contour, surfc, slice, isosurface
för att se ungefär vart de kritiska punkterna är

## 2.) Lös f' = 0

Räkna ut f' m.h.a. jacobi.m
Lös f' = 0 m.h.a. newton.m
(använd startgissning från 1.)

Lär er att se vad för typ av kritisk punkt det är i en plot genom att studera nivåkurvorna/ytorna.

## 3.) Undersök de kritiska punkternas typ

Räkna ut f'' m.h.a. jacobi.m
Räkna ut f''(a):s egenvärden m.h.a. eig

---

Ex) $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

1. Slice och isosurface eftersom 3 variabler.....

2.
```
L = @(x)(x(1)*x(2) + x(3)*(x(1)*x(1) + x(2)*x(2) - 1));
DL = @(x)(jacobi(L,x)');
cp1= newton(DL, x0, tol);
cp2= ——"—— x1 —"—
 :
```

3.
```
D2L = @(x)(jacobi(DL,x)');
H = D2L(cp...);
lambda = eig(H);
```