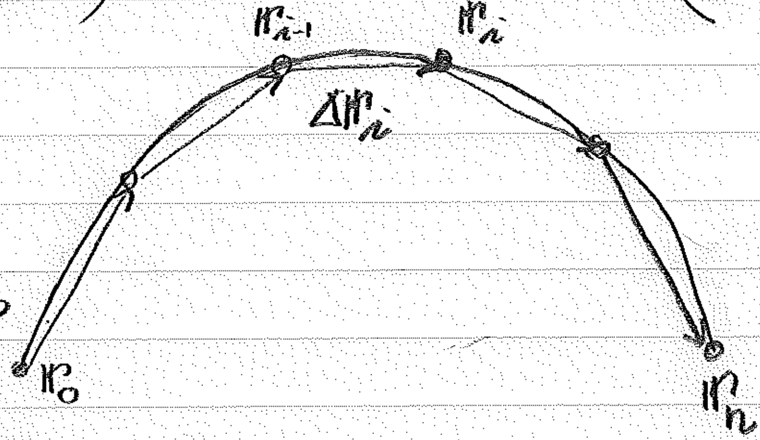
Fö 1.2

## Båglängd (arc length) 




$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$

Nät (mesh):

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = b$

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i)$, $\Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$

Kurvans längd approximeras av:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} |\Delta\mathbf{r}_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta\mathbf{r}_i}{\Delta t_i}\right| \Delta t_i$$

Om $\max \Delta t_i \to 0$ och $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ är kontinuerlig får vi kurvans längd:

$$L = \int_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$$

Båglängden är

$$s(\tilde{t}) = \int_a^{\tilde{t}} \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$$

Vi får $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right| = v(t)$ (farten)

Båglängdselementet är

$$ds = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$$

$$L = \int_C ds = \int_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$$

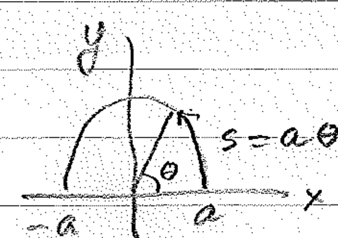
Båglängden kan också användas som parameter:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad s \in [0, L]$$

Då blir farten

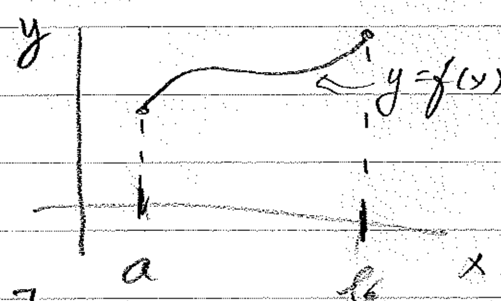
$$v(s) = \frac{ds}{ds} = 1 .$$

<u>Exempel</u> (halvcirkel)




$$\begin{cases} x = a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \\ y = a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \end{cases}, \quad s \in [0, a\pi]$$

<u>Exempel</u> (graf i planet)




$$y = f(x), \quad x \in [a, b]$$

Välj $t = x$ : $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + f'(t)\,\mathbf{j}, \quad v(t) = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$

eller $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$. $\quad L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

# Krökning (Adams 11.4 endast 644-646)

Kurva på parameterform:

$$\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$$

Om $\mathbb{v}(t) \neq 0$ så kan vi bilda **enhetstangenten**:

$$\hat{\mathbb{T}}(t) = \frac{\mathbb{v}(t)}{v(t)} = \frac{\frac{d\mathbb{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbb{r}}{dt}\right|}$$

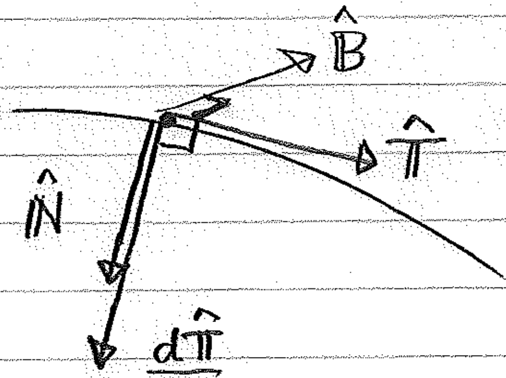
"hatt" betyder normering

Med båglängdsparametrisering $\mathbb{r} = \mathbb{r}(s)$ har vi $v = 1 \neq 0$ så att

$$\hat{\mathbb{T}}(s) = \frac{\mathbb{v}(s)}{\underbrace{v(s)}_{=1}} = \mathbb{v}(s) = \frac{d\mathbb{r}}{ds}$$

Obs att $\hat{\mathbb{T}}(s) \cdot \hat{\mathbb{T}}(s) = |\hat{\mathbb{T}}(s)|^2 = 1$

Derivera: $2\hat{\mathbb{T}} \cdot \hat{\mathbb{T}}'(s) = 0$ ortogonala!




**Enhetsnormalen**: $\hat{\mathbb{N}}(s) = \frac{\hat{\mathbb{T}}'(s)}{|\hat{\mathbb{T}}'(s)|}$

Koordinatsystem som följer med: $\hat{\mathbb{T}}(s), \hat{\mathbb{N}}(s), \hat{\mathbb{B}}(s)$

**Enhetsbinormalen**: $\hat{\mathbb{B}}(s) = \hat{\mathbb{T}}(s) \times \hat{\mathbb{N}}(s)$

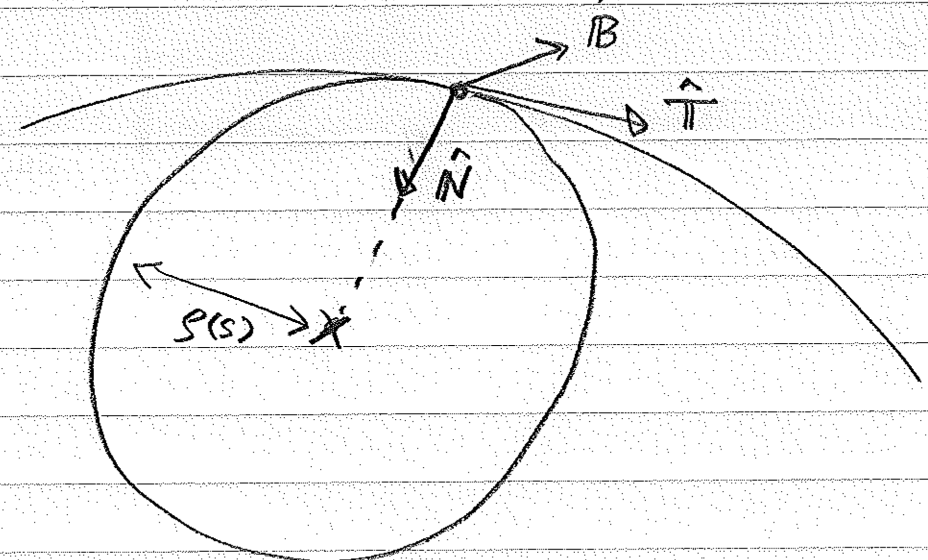
**Definition 1** Kurvans **krökning**

är

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{T}}{ds} \right| \qquad (\kappa = \text{kappa})$$

**Krökningsradien** är

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \qquad (\rho = \text{rho})$$

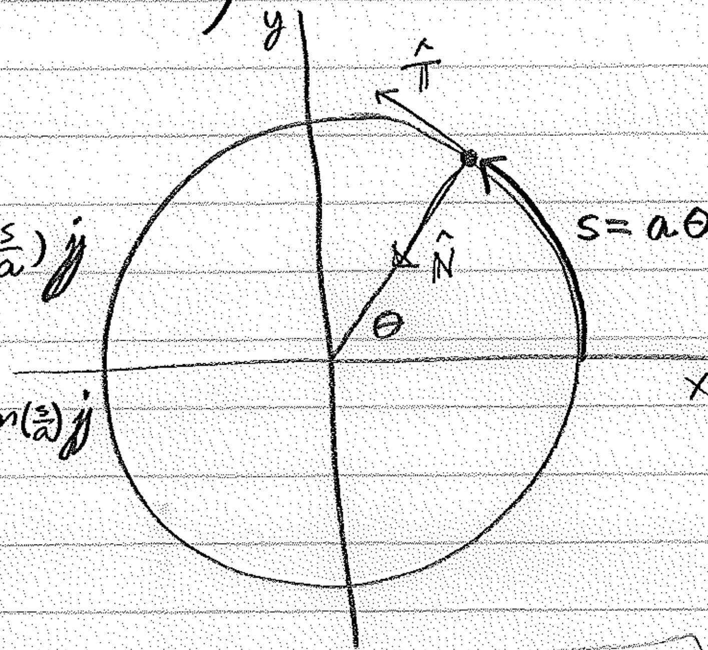



$\rho$ = radien i tangerande cirkel.

Båglängdsparametrisering är bra för teori, men svår att använda i beräkningar, därför att det är sällan möjligt att bestämma s.

<u>exempel</u> (cirkel, radie a)

$$\mathbf{r} = a\cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + a\sin\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$




$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\sin\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = -\frac{1}{a}\cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} - \frac{1}{a}\sin\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\mathbf{r}$$

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right| = \frac{1}{a}$$

Här är det lätt att bestämma s.

$$\rho(s) = a$$

$$\hat{\mathbf{N}}(s) = \frac{-\frac{1}{a^2}\mathbf{r}}{\left|-\frac{1}{a^2}\mathbf{r}\right|} = \frac{-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\hat{\mathbf{r}}$$

$$\hat{\mathbf{B}}(s) = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$$

---

Man kan definiera kurvans <u>torsion</u> (vridning) genom att beräkna $\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}$, (sid 648).

Vi nöjer oss med krökning.

# Krökning i annan parametrisering

(Adams 11.4 sid 651 och Example 2)

I alla parametriseringar gäller:

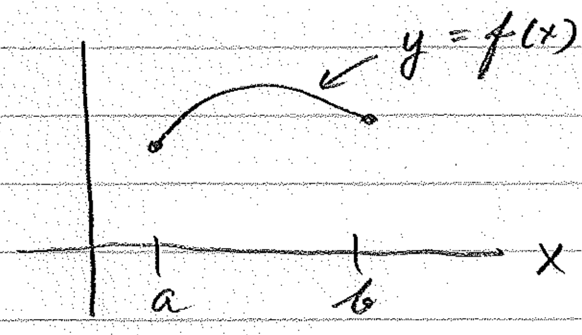
$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} \qquad \text{(utan bevis).}$$

---

## Exempel 2 (Graf)

$$y = f(x), \quad x \in [a, b]$$

Parametrisera med $t = x$.




$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + f'(t)\mathbf{j}, \quad v = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

$$\mathbf{a} = f''(t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = f''(t)\mathbf{k}$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} = \frac{|f''(t)|}{\left(\sqrt{1 + f'(t)^2}\right)^3}$$

Gå tillbaka till $x$: $\kappa(x) = \dfrac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$.

## 12.1 Funktion av flera variabler

## Datorövning 1: Visualisering

$x = [x_1, \ldots, x_n]$

$y = f(x)$

$y = f(x_1, \ldots, x_n)$

$f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$

$\mathcal{D}(f)$ = definitionsmängden, $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^n$
$R(f)$ = värdemängden, $R(f) \subset \mathbb{R}$
målmängden (target set) är $\mathbb{R}$

Det är ofta omöjligt (och onödigt) att specificera värdemängden. Därför anger vi målmängden istället.

Om 2 eller 3 variabler skriver vi ibland

$z = f(x, y)$

$v = f(x, y, z)$

## Visualisering
## Kurva i rummet.

$\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \quad t \in [a,b]$

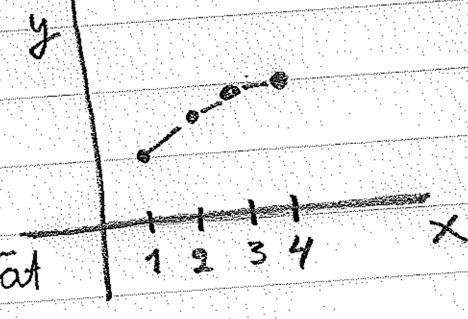
```
>> t = linspace(0, 2);      nät i [0,2]
>> x = t;
>> y = t.^2;
>> z = t.^3;
>> plot3(x,y,z)
>> grid on; axis equal
```

## Graf (av envariabelfunktion)

Plotta $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, i $x,y$-planet.

Kurva (av speciell form)

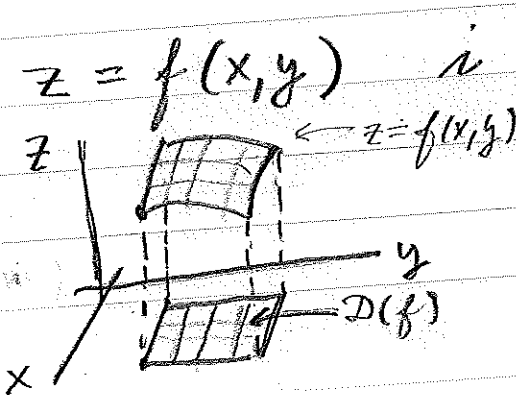
```
>> x = 1:4;          nät i [1,4]
>> y = sqrt(x);      y = √x
>> plot(x,y)
```




```
>> x = linspace(1,4)   finare nät
```

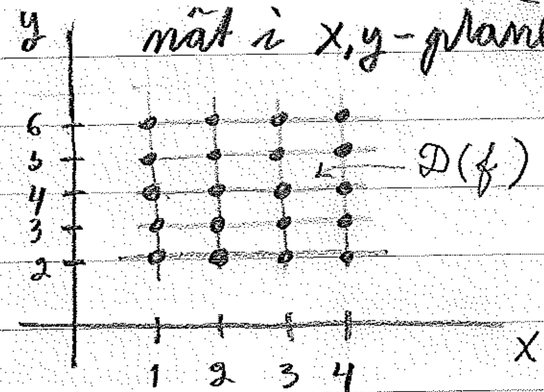
## Graf (av tvåvariabelfunktion)

Plotta $z = f(x,y)$ i $x,y,z$-rummet.




Graf är en yta av speciell form.

```
>> x = 1:4      (nät i x)
>> y = 2:6      (nät i y)
>> [X,Y] = meshgrid(x,y)
               (nät i D(f))
>> Z = X.*Y.^2;     (z = xy^2)
```




```
>> mesh(X,Y,Z)
>> surf(X,Y,Z)
```

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (5 \times 4)$$

Använd x = linspace(1, 4) för finare nät.

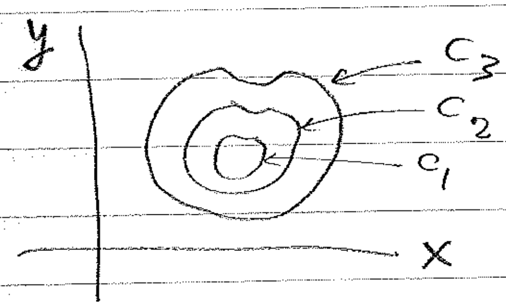
$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (5 \times 4)$$

## Nivåkurvor (level curves)

Plotta $f(x,y) = C$ i x,y-planet för flera värden på C.

Kurvor.

```
>> contour(X,Y,Z)
>> surfc(X,Y,Z)
```




## Nivåytor

$f(x,y,z) = C$ plottas i rummet.

```
>> [X,Y,Z] = meshgrid(x,y,z);
>> V = f(X,Y,Z);
>> isosurface(X,Y,Z,V,0)
```