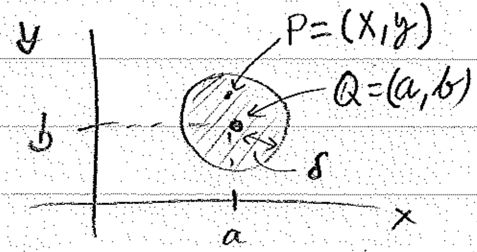
FÖ 1.3

# 12.2 Gränsvärde och kontinuitet



**Repetera 10.1** En omgivning till (neighborhood) $Q=(a,b)$ är en cirkelskiva (disk) med centrum i $(a,b)$.

Avstånd: $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$




**Definition 2** Vi säger att

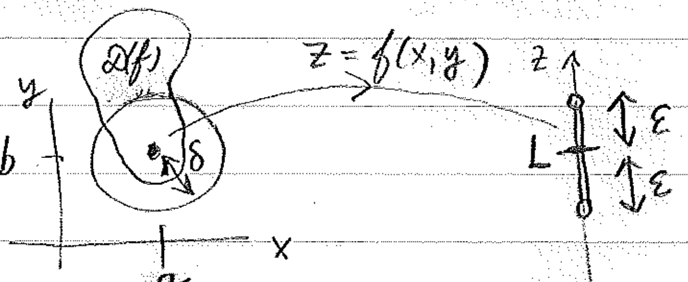
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

om

(i) varje omgivning av $(a,b)$ innehåller punkter från $D(f)$ som är skilda från $(a,b)$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ så att

$$\begin{cases} (x,y) \in D(f) \\ 0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$




$f(x,y) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$
$\varepsilon$-omgivning av $L$ på linjen

Obs: $(x,y)$ närmar sig $(a,b)$ på alla möjliga sätt.

<u>Exempel 1</u> $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ när $(x,y) \to (0,0)$

Typ " $\dfrac{0}{0}$ ". $\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \neq (0,0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

På x-axeln $(y=0)$: $f(x,y) = f(x,0) = 0 \to 0$, $x \to 0$

På y-axeln $(x=0)$: samma

På linjen $y=x$: $f(x,y) = f(x,x) = \dfrac{2x^2}{2x^2} = 1$, $x \to 0$

Gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ existerar ej.

Testa: $y = x^2$.

<u>Exempel 2</u> $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ Typ " $\dfrac{0}{0}$ ".

Vi gissar $L=0$, för "grad 3/grad 2". $\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \neq (0,0)\}$

<u>Bevis</u> $$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} |y| \leq$$

$$\leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \text{ då } (x,y) \to (0,0)$$

---

<u>Definition 3</u> Funktionen $f$ är kontinuerlig i $(a,b)$ om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

(Dvs om "värdet = gränsvärdet".)

Obs: I Exempel 2 existerar inte $f(0,0)$, dvs $(0,0) \in D(f)$.

Men vi kan omdefiniera $f$ så här:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y} & \text{om } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{om } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Då blir $D(f) = \mathbb{R}^2$ och $f$ är kontinuerlig överallt.

Om definierar $f(0,0) = 1$ istället så blir $D(f) = \mathbb{R}^2$ men $f$ diskontinuerlig i $(0,0)$.

## 12.3 Partiella derivator

<u>Definition 4</u> De partiella derivatorna av $f(x,y)$ med avseende på $x$ och $y$ är

$$f_1(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_2(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

<u>Exempel</u> $f(x,y) = x^3y^2 + x$

$f_1(x,y) = 3x^2y + 1$

$f_2(x,y) = 2x^3y$

<u>Beteckningar</u> $z = f(x,y)$

$$f_1(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = D_1 f(x,y) = D_x f(x,y)$$

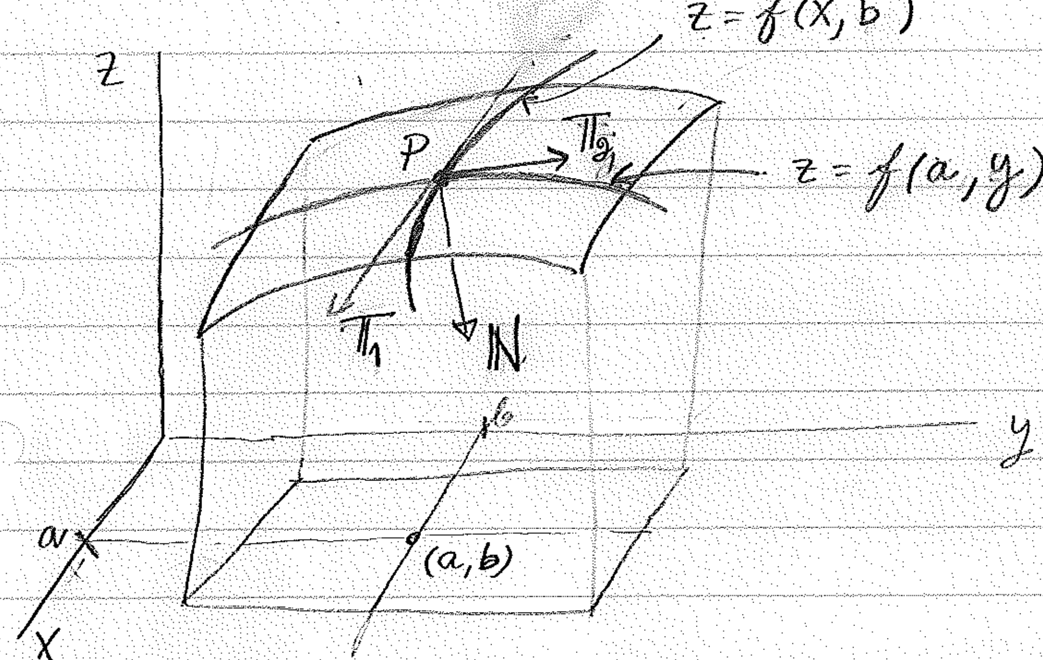
$$f_2(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = D_2 f(x,y) = D_y f(x,y)$$

Detta är Adams beteckning. Borde ha ett "prim", dvs

$f_1'(x,y)$, $f_2'(x,y)$, $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$.

# Tangentplan och normal till graf (sid 686)

Graf: $z = f(x,y)$ $\qquad P = (a, b, f(a,b))$




Viktigt!!

Två kurvor på ytan: $z = f(x,b)$ och $z = f(a,y)$

På parameterform:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + b\mathbf{j} + f(x,b)\mathbf{k} \quad \text{(parameter: } x\text{)}$$

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(a,y)\mathbf{k} \quad \text{(parameter: } y\text{)}$$

Tangentvektorer i P:

$$\mathbf{T}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{dx} = \mathbf{i} + f_1'(a,b)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_2 = \frac{d\mathbf{r}}{dy} = \mathbf{j} + f_2'(a,b)\mathbf{k}$$

De spänner upp <u>tangentplanet</u> i P.

En normalvektor ges av

$$N = T_2 \times T_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & f_2'(a,b) \\ 1 & 0 & f_1'(a,b) \end{vmatrix} =$$

$$= f_1'(a,b)\, i + f_2'(a,b)\, j - k$$

Tangentplanets ekvation:

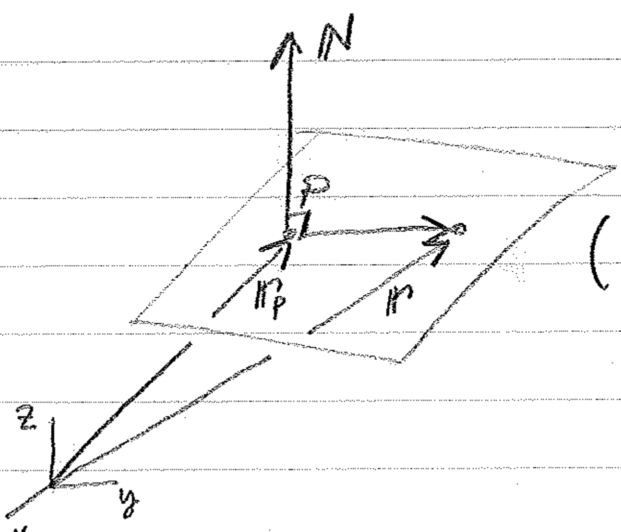
$$N \cdot (r - r_P) = 0$$

$$f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b) - \big(z - f(a,b)\big) = 0$$

$$z = f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b)$$

Detta är alltså ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $P = (a, b, f(a,b))$.

<u>Senare ska vi göra detta på annat sätt med hjälp av gradient-vektor.</u>




Planets ekv.:

$$(r - r_P) \cdot N = 0$$

## 12.4 Derivator av högre ordning.

Rena andra-derivator $\overbrace{\ }^{\text{av } z=f(x,y)}$ med avseende på x och y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x,y) = f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{22}(x,y) = f_{yy}(x,y)$$

Blandade derivator med avseende på x och y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

först y sedan x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{12}(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

Detta är beteckningar enligt Adams.
Man borde beteckna derivator med "prim", dvs

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x,y) = f_x'(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{21}''(x,y) = f_{yx}''(x,y)$$

och så vidare. Så att man inte förväxlar med vektor- och matris-index, t.ex.,

$$f = (f_1, \ldots, f_n) .$$

<u>Exempel</u> $f(x,y,z) = z^2 e^{x-y}$

$f_1'(x,y,z) = z^2 e^{x-y}$ $\qquad f_2'(x,y,z) = -z^2 e^{x-y}$

$f_3'(x,y,z) = 2z\, e^{x-y}$

$f_{31}''(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} f_3' = 2z\, e^{x-y}$

$f_{13}''(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z} f_1' = 2z\, e^{x-y}$

$f_{133}'''(x,y,z) = 2\, e^{x-y}$, $\quad f_{313}''' = 2\, e^{x-y}$

Obs att $f_{31}'' = f_{13}''$, $f_{133}''' = f_{313}'''$ här. Det är ingen slump.

<u>Sats 1</u> (Blandade derivator är lika.)

Antag att två blandade derivator av ordning $m$ består av samma derivator i olika ordning. Om dessa är kontinuerliga i P och alla derivator av lägre ordning är kontinuerliga i en omgivning till P så är de två blandade derivatorna lika i P.

Utan bevis.

En lite enklare (men svagare) formulering:

Om alla partiella derivator till $f$ är kontinuerliga i en omgivning till $P$ så spelar det ingen roll i vilken ordning man beräknar de blandade partiella derivatorna.

---

Exempel 3 (Laplaces ekvation)

Visa att $z = e^{kx}\cos(ky)$ $(k \in \mathbb{R})$

uppfyller den partiella differential-ekvationen (PDE)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Bevis: $\frac{\partial z}{\partial x} = k e^{kx}\cos(ky)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 e^{kx}\cos(ky)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -k e^{kx}\sin(ky)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k^2 e^{kx}\cos(ky)$

så att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k^2 e^{kx}\cos(ky) - k^2 e^{kx}\cos(ky) = 0$$

Exempel 4 (Vågekvationen)

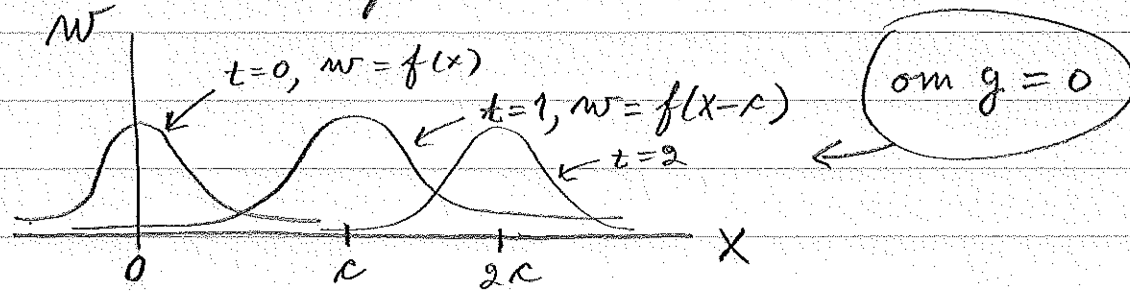
Funktionen

$$w = f(x - ct) + g(x + ct)$$

uppfyller PDE:n

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Här betyder termen $f(x-ct)$ en våg som rör sig åt höger med hastigheten $c$.




Termen $g(x+ct)$ är en våg som rör sig åt vänster.