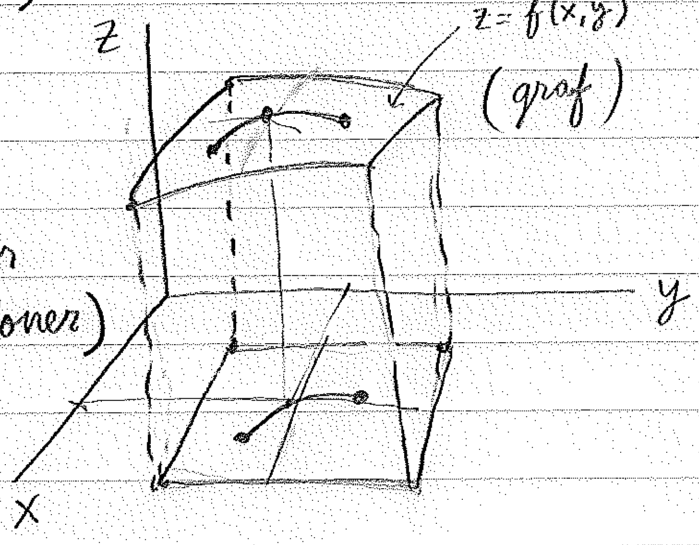
FÖ 2.1

12.5 Kedjeregeln (endast sid 695–698 + example 10 sid 702)

En partikel rör sig på en yta (en yttre funktion)

$z = f(x,y)$.



Om partikelns x,y-koordinater är (två inre funktioner)

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$

så är höjden vid tiden t (sammansatt funktion)

$$z = f(u(t), v(t)) = g(t).$$

Höjdändringen per tidsenhet blir

$$\frac{dz}{dt} = g'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = u(t+h) - u(t) \\ \Delta v = v(t+h) - v(t) \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t)+\Delta u, v(t)+\Delta v) - f(u(t), v(t)+\Delta v)}{\Delta u} \frac{u(t+h)-u(t)}{h}$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t), v(t)+\Delta v) - f(u(t), v(t))}{\Delta v} \frac{v(t+h)-v(t)}{h}$$

(vi hoppar över beviset)

Det verkar som om gränsvärdet blir:

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = f_1'(u(t), v(t))\, u'(t) + f_2'(u(t), v(t))\, v'(t)$$

Kan också skrivas

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} .$$

På matrisform:

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = \left[f_1'(u(t), v(t)), \; f_2'(u(t), v(t)) \right] \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}$$

eller

$$\frac{dz}{dt} = \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \; \frac{\partial z}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$$

Obs att de partiella derivatorna $f_1'(u,v)$, $f_2'(u,v)$ bildar en <u>radvektor</u> medan de ordinära derivatorna $u'(t)$, $v'(t)$ bildar en <u>kolonnvektor</u>.

En annan version av kedjeregeln.

$$z = f(x,y), \quad x = u(s,t), \quad y = v(s,t)$$

$$z = f(u(s,t), v(s,t)) = g(s,t)$$

$$\begin{cases} g_1'(s,t) = \dfrac{\partial}{\partial s} g(s,t) = f_1'(u(s,t), v(s,t))\, u_1'(s,t) + f_2'(u(s,t), v(s,t))\, v_1'(s,t) \\ g_2'(s,t) = \dfrac{\partial}{\partial t} g(s,t) = f_1'(u(s,t), v(s,t))\, u_2'(s,t) + f_2'(u(s,t), v(s,t))\, v_2'(s,t) \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

På matrisform:

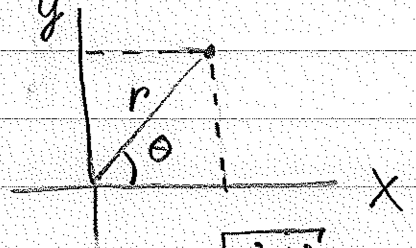
$$\left[\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Fler versioner är möjliga beroende på hur många variabler som man har. Mer om det i Fö 2.2.

I beviset räcker det inte att f är <u>partiellt deriverbar</u>. Den måste vara <u>deriverbar</u> (på riktigt). Vad är det?

Exempel 10 **Laplaces ekvation** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ **i polära koordinater.**

Antag $z = f(x,y)$ och inför polära koordinater



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Visa att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Bevis. Vi beräknar vänsterledet med kedjeregeln:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{=\cos\theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{=\sin\theta} = \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial r} \overset{\theta = \text{konstant}}{=} \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= \cos\theta\left(\cos\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right)$$

$$+ \sin\theta\left(\cos\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}_{=-r\sin\theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}_{=r\cos\theta} = -r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \overset{r=\text{konstant}}{=} -r\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}\right) + r\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= -r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$- r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= -r\frac{\partial z}{\partial r} - r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)$$

$$+ r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$= -r\frac{\partial z}{\partial r} + r^2\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Alltså:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Att kunna räkna med polära koordinater är mycket viktigt.

I övning 12.5:24 görs detta på ett annat sätt.

12.6 Deriverbarhet
(endast sid 705-711, Sats 3,4,5 utan bevis)

Kedjeregeln:

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = f_1'(u(t), v(t))u'(t) + f_2'(u(t), v(t))v'(t)$$

Det räcker inte att f är partiellt deriverbar, dvs att partiella derivatorna existerar, utan den måste vara deriverbar.

Vad betyder det?

Kom ihåg ordinär derivata
(för envariabelfunktion)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

dvs

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0$$

Med $x = a+h$, $h = x-a$ bildar vi linjäriseringen av f i a:

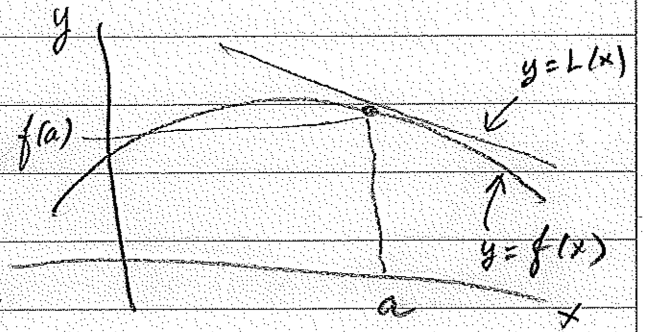
$$L(x) = f(a) + f'(a)h = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Ekvationen $y = L(x)$

dvs $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

är tangentlinjen till grafen $y = f(x)$.

i punkten $(a, f(a))$.



Linjär approximation:

$f(x) \approx L(x)$ om $x \approx a$.

Två variabelfunktion: med $x = a+h$, $y = b+k$ är linjäriseringen av $f(x,y)$ i (a,b)

$$L(x,y) = f(a,b) + f_1'(a,b)h + f_2'(a,b)k$$

$$= f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b).$$

Ekvationen $z = L(x,y)$ är ekv. för tangentplanet till grafen $z = f(x,y)$.

(se sid 687, FÖ 1,3)

Om detta ska gälla måste linjäriseringen vara en bra approximation till f nära (a,b): $f(x,y) \approx L(x,y)$, om $(x,y) \approx (a,b)$.

Def 5 Funktionen $f(x,y)$ är **deriverbar** ("differentiable") i (a,b) om

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_1'(a,b)h-f_2'(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Sats 4 Om de partiella derivatorna är kontinuerliga i omgivning till (a,b) så är f deriverbar.

Sats 5 Om den yttre funktionen är deriverbar och den inre funktionen är partiellt deriverbar så gäller kedjeregeln.

Obs: * f deriverbar i (a,b) $\Rightarrow$ f är kontinuerlig i (a,b).

* f deriverbar i (a,b) $\Rightarrow$ f är partiellt deriverbar i (a,b).

* Deriverbar betyder "deriverbar på riktigt". Kallas ofta differentierbar i svenska böcker.