FÖ 3.1

Optimering. Mycket ingenjörsarbete går ut på att optimera, dvs minimera eller maximera en funktion. T.ex. maximera utbytet av en process, minimera materialåtgången, osv.

Dvs beräkna $\max f(x)$ eller $\min f(x)$.

Obs att $\max f(x) = -\min(-f(x))$.

Det handlar om att sortera värdena, oerhört kostsam beräkning. Ofta kan man ta en genväg med hjälp av flervariabelanalys: i maxpunkt gäller

$$f'(x) = 0 \qquad \text{(radmatris)}$$

Ekvationssystem, Newtons metod.
Matematisk disciplin: Optimeringslära.

13.1 Extremvärden

Funktion av m variabler $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

(Adams: två variabler $z = f(x,y)$)

Funktionen f har lokalt maximum i a om

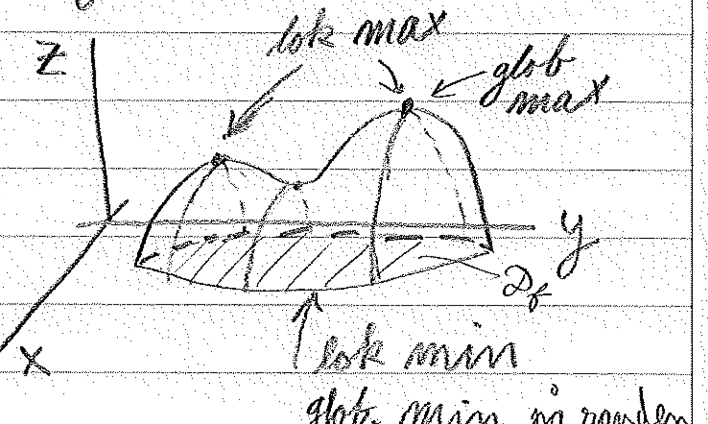
$$f(x) \leq f(a) \quad \text{för alla } x \in D_f \text{ som}$$

är tillräckligt nära a.

Globalt maximum i a om

$$f(x) \leq f(a) \quad \text{för alla } x \in D_f.$$

Lokalt och globalt minimum på samma vis.



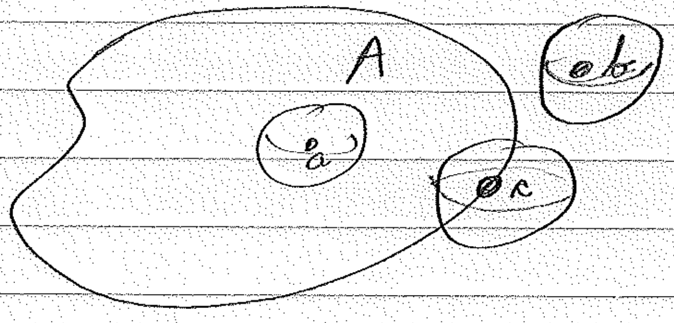
Extremvärde = maximum eller minimum, dvs värdet $f(a)$.

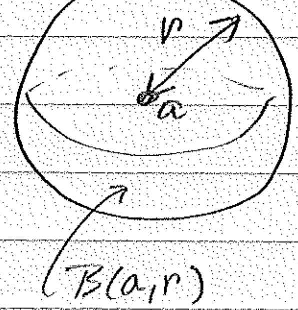
Extrempunkt = punkten a där max eller min inträffar.

Beteckningar

<u>Omgivning</u> till a : $B(a,r)=\{x : |x-a|<r\}$

(öppet klot ("ball") med centrum i a och radie r)





a är <u>inre punkt</u> till A : finns omgivning helt i A

b är <u>yttre punkt</u> till A : finns omg. helt utanför A

c är <u>randpunkt</u> till A : varje omgivning skär både A och utanför A

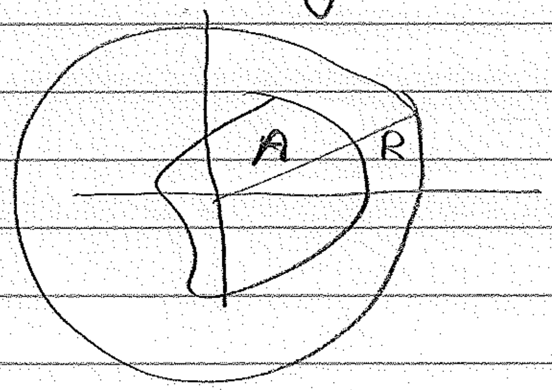
A är en <u>sluten</u> (closed) mängd om den innehåller alla sina randpunkter.

A är <u>öppen</u> om innehåller inga av sina randpunkter.

Exempel: öppet klot $\{x : |x-a|<r\}$
slutet klot $\{x : |x-a|\leq r\}$
$\mathbb{R}^m$ både öppen och sluten (inga randpunkter)

Begränsad (bounded) mängd eller funktion.

Mängden A är begränsad
om $A \subset B(0,R)$ för något R.



Funktionen f är begränsad
om värdemängden är begränsad,
dvs $R_f \subset B(0,M)$ för något M,
dvs $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in D_f$.

Sats 1 (Nödvändiga villkor för extremvärde)

Om f har extremvärde i a så är a en av följande:

(a) kritisk punkt till f, dvs $f'(a) = 0$.

(b) singulär punkt till f, dvs $f'(a)$ existerar ej.

(c) randpunkt till D_f.

Bevis Antag att a är en punkt som inte är av typen (a), (b) eller (c). Alltså är a en inre punkt med $f'(a) \neq 0$.

Vi måste visa att a inte är extrempunkt.

Antag att den är extrempunkt.

Bilda envariabel-funktionen $g(t) = f(a+th)$. Då har g extrempunkt i $t=0$ för alla riktningar h.

Men $g'(0) = f'(a)h$ måste då vara 0 för alla h. Det är omöjligt eftersom $f'(a) \neq 0$.

Satsen handlar om bland vilka slags punkter vi ska söka extrempunkter. Men den garanterar inte att det finns några etrempunkter.
Men det gör denna sats.

Sats 2 (Tillräckliga villkor för extremvärde).

Om f är kontinuerlig och $D_f \subset \mathbb{R}^m$ är sluten och begränsad (dvs kompakt) så finns punkter i D_f där f har globala max. och min.

(Utan bevis.)

Vi säger: f är begränsad (bounded) om det finns M: $|f(x)| \leq M$ för alla $x \in D_f$.

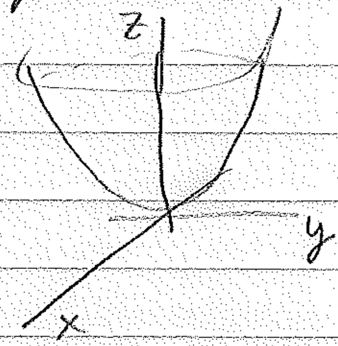
<u>Exempel</u> $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad D_f = \mathbb{R}^2$$

Inga randpunkter, inga singulära punkter.

Krit punkt: $f'(x) = [2x_1, 2x_2] = [0,0]$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$



Kritisk punkt i origo.

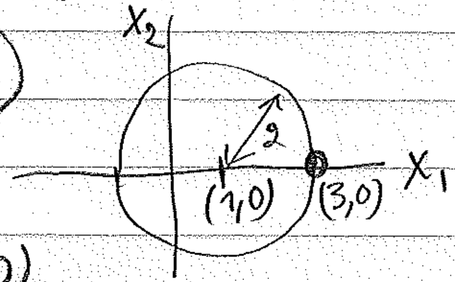
Vi ser att: globalt min. i $(0,0)$

ingen globalt max. för

$f(x) \to \infty$ då $|x| \to \infty$. (f är <u>obegränsad</u>)

<u>Exempel</u> $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ med $D_f = \{x : |x-(1,0)| \le 2\}$

(slutet klot) (eller sluten disk)



Vi inser: globalt max i $(3,0)$, globalt min i $(0,0)$.

<u>Exempel</u> Samma f med $D_f = \{x : |x-(1,0)| < 2\}$

(öppet klot). Globalt min i $(0,0)$, men ingen globalt max för $(3,0) \notin D_f$.

Exempel $f(x,y) = y^2 - x^2$, $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$f(x) = x_2^2 - x_1^2$$

$$f'(x) = [-2x_1, 2x_2] = [0,0]$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Kritiska punkt i $(0,0)$.

Varken max eller min:

$$f(x,0) = -x^2 < f(0,0) = 0 \text{ om } x \neq 0$$

$$f(0,y) = +y^2 > f(0,0) = 0 \text{ om } y \neq 0$$

Sadelpunkt.

Vi säger att en inre kritisk punkt är en <u>sadelpunkt</u> om den är varken max- eller minpunkt.

Hur avgör man om en kritisk punkt är max, min eller sadelpunkt?
Nästa sats ger delvis svar.