FÖ 3.2

Andra-derivata-testet.

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
Kritisk punkt: $f'(a) = 0$

Hur kan man avgöra om en kritisk punkt är max, min- eller sadelpunkt?

Vi ska "kolla tecknet" på andra derivatan.

Vi behöver Hesse-matrisen:

$$\mathcal{H}(x) = f''(x) = D^2 f(x) =$$

$$= \begin{bmatrix} f''_{11}(x), & \dots, & f''_{1m}(x) \\ \vdots & & \\ f''_{m1}(x), & \dots, & f''_{mm}(x) \end{bmatrix}, \quad f''_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Den är $m \times m$, symmetrisk $f''_{ij} = f''_{ji}$ enligt Sats 1 i 12.4.

Sats 3 (Andra-derivata-testet)

Antag f har en kritisk punkt i en inre punkt $a \in D_f$. Antag att alla partiella derivator av ordning två är kontinuerliga i en omgivning till a så att Hessematrisen $f''(x)$ också är kontinuerlig.

Då gäller följande:

(a) $f''(a)$ positivt definit
$\Rightarrow$ lokalt min i a.

(b) $f''(a)$ negativt definit
$\Rightarrow$ lokalt max i a.

(c) $f''(a)$ indefinit
$\Rightarrow$ sadelpunkt i a.

(d) $f''(a)$ är ej pos. eller neg. definit eller indefinit $\Rightarrow$ ingen information

Kom ihåg från linjär algebra.

Matris A, $m \times m$, symmetrisk,

dvs $A^T = A$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Funktionen

$$= [x_1, \dots x_m] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} =$$

$$g(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{m} \sum^{m} a_{ij} x_i x_j =$$

$$= a_{11} x_1^2 + 2 a_{21} x_1 x_2 + \dots + a_{mm} x_m^2$$

kallas kvadratisk form.

$\boxed{\text{ortonormerade: } g_i \cdot g_j = g_i^T g_j = \begin{cases} |g_i|^2 = 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}}$

A har reella egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ och ortonormerade egenvektorer $g_1, \dots, g_m$.

(a) A är pos. definit $\iff x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\iff$ alla $\lambda_j > 0$

(b) A neg. def. $\iff x^T A x < 0 \quad \forall x \neq 0$

$\iff$ alla $\lambda_j < 0$

(c) A är indefinit $\iff x^T A x$ både > 0 och < 0

$\iff$ något $\lambda_j > 0$ och något $\lambda_j < 0$.

(d) A är pos. eller neg. semidefinit

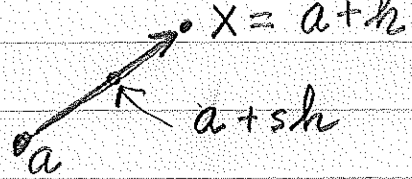
$\iff x^T A x \geq 0$ eller $x^T A x \leq 0$

$\iff$ alla $\lambda_j \geq 0$ eller alla $\lambda_j \leq 0$

Bevis av Sats 3

Taylors formel av grad 1:

$(x = a + h)$



$$f(x) = f(a+h) =$$

$$= f(a) + f'(a)h + \underbrace{\tfrac{1}{2} h^T f''(a+sh) h}_{=\text{restterm } R_1}$$

där $0 \le s \le 1$.

Den är på formen

$$\underset{1\times 1}{[\cdot]} = \underset{1\times 1}{[\cdot]} + \underset{1\times m}{[\cdot \; \cdot \; \cdots \; \cdot]} \underset{m\times 1}{\begin{bmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}} + \frac{1}{2} \underset{1\times m}{[\cdot \; \cdot \; \cdots \; \cdot]} \underset{m\times m}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{bmatrix}} \underset{m\times 1}{\begin{bmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}}$$

Här är $f'(a) = 0$ (kritisk punkt),

så att

$$f(x) = f(a) + \tfrac{1}{2} h^T f''(a+sh) h.$$

Om $f''(a)$ är pos. def. så är även $f''(a+sh)$ det för alla h med $|h|$ litet.

(Här behövs <u>strikt tecken</u>: $h^T f''(a) h > 0$.)

I så fall

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} \underbrace{h^T f''(a+sh) h}_{>0} > f(a)$$

för alla h med litet $|h| > 0$.

Alltså: lokalt min i a.

Det bevisar (a). De andra fallen bevisas på samma vis.

Obs att det behövs strikt tecken!

Därför ger fall (d) ingen info.

Undersökning av kritiska punkter.

Metod. Datorövning 3.

1) Plotta funktionen om det går för att få grov uppfattning.

2) Kritiska punkter ges av

$$f'(x)^T = 0 \text{ (kolonn)}$$

obs!

```
> f = @(x)(...)
> Df = @(x) jacobi(f,x)'
> x = newton(Df,x,1e-6)
```

Löses för hand eller hellre med Newtons metod.

3) För varje kritisk punkt ställer vi upp Hessematrisen

$$f''(a)$$

```
> H = jacobi(Df,x)
> eig(H)
```

Egenvärdena beräknas.

Alla $\lambda_j > 0 \Rightarrow$ lok. min

$< 0 \Rightarrow$ lok max

Olika tecken $\Rightarrow$ sadelpunkt.

Obs: att Hessematrisen är jacobimatrisen för $f'(x)^T$.

Obs: att $f'(x)$ är radmatris, måste bli kolonnmatris $f'(x)^T$ här.

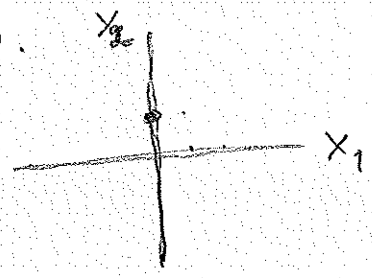
Exempel $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$

1) Kritiska punkter ges av:

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} 2x_1x_2^3 \\ 3x_1^2x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösning: $x_1 = 0$ eller $x_2 = 0$.

dvs kritiska punkter på hela x_1-axeln och hela x_2-axeln.



2) Hesse-matrisen:

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 2x_2^3 & 6x_1x_2^2 \\ 6x_1x_2^2 & 12x_1^2x_2 \end{bmatrix}$$

Några kritiska punkter:

a) $a = (0,1)$, $f''(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$

Fall (d), ingen info. $f(0,1) = 0$.

Vad är det då? Nära $a = (0,1)$: $f(s, 1+t) = s^2(1+t)^3 \geq 0 = f(0,1)$ för alla små s, t.

Lokalt minimum.

b) $a = (0,0)$ $f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Ingen info. $f(0,0) = 0$

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1, x_1) = x_1^5 \begin{cases} > 0 & x_1 > 0 \\ < 0 & x_1 < 0 \end{cases}$ Sadelpunkt.

Exempel 6 $\quad f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$ (8

Kritiska punkter:

$$\begin{cases} 2xy - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + 2yz = 0 & (2) \\ y^2 + 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

(3) ger $\quad z = -\frac{y^2}{2}$

Insättes i (2): $\quad x^2 + 2y\left(\frac{-y^2}{2}\right) = 0$

$$x^2 = y^3, \quad y = x^{2/3}$$

Insättes i (1): $\quad x \cdot x^{2/3} = 1, \quad x = 1$

Sedan $\quad y = 1, \quad z = -\frac{1}{2}$

En kritisk punkt: $\quad (1, 1, -\frac{1}{2})$.

Hesse matrisen:

$$f''(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2y & 2 & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{bmatrix}$$

$$f''(1,1,-\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Egenvärden: ges av

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{(-1-\lambda)(2-\lambda)-4} - 2\cdot 2(2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)\Big((-1-\lambda)(2-\lambda) - 4 - 4\Big) = 0$$

$2 - \lambda = 0$ eller $\lambda^2 - \lambda - 10 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 10}$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 10} > 0$

$\lambda_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 10} < 0$

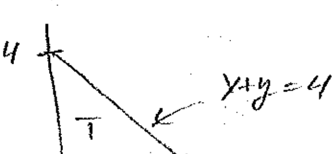
Olika tecken: sadelpunkt.

13.2 Extremvärden i begränsade områden

Metod

1) Bestäm alla kritiska och singulära punkter i det inre av D_f.
2) Bestäm extrempunkter på randen av D_f.
3) Jämför f mellan dessa punkter.

Exempel 2 Bestäm extremvärdena för $f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$ i triangeln T.



1) Singulära punkter: inga.
Kritiska punkter ges av:

$$\begin{cases} 2xy\,e^{-(x+y)} + x^2y\,e^{-(x+y)}\cdot(-1) = 0 \\ x^2 e^{-(x+y)} + x^2y\,e^{-(x+y)}(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(2-x)=0 & (1) \\ x^2(1-y)=0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ $x=0$ eller $y=0$ eller $x=2$

(2) $\Leftrightarrow$ $x=0$ eller $y=1$

Kritiska punkter: $(0,y)$ och $(2,1)$.

Endast $(2,1)$ är inre punkt till T.

$f(2,1) = 4e^{-3}$

2) På randen $x=0$: $f(0,y)=0$

På randen $y=0$: $f(x,0)=0$

På randen $\begin{cases} x+y=4 \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$: $f(x,4-x) = x^2(4-x)e^{-(x+4-x)} = x^2(4-x)e^{-4}$

$g(x) = x^2(4-x)e^{-4} = (4x^2-x^3)e^{-4}$

$g'(x) = (8x-3x^2)e^{-4} = x(8-3x)e^{-4} = 0$

$x=0$ eller $x=\frac{8}{3}$, $\quad 4-\frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$

Obs: $g(0)=0$, $g(4)=0$ (ändpunkterna)

$f\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{64\cdot 4}{27}e^{-4} = \frac{256}{27}e^{-4}$

3) Jämför: $f(0,y)=0=f(x,0)=0$

$f(2,1) = 4e^{-3} \approx 0.199$

$f\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{256}{27}e^{-4} \approx 0{,}174 < f(2,1)$

Max $= f(2,1)$

Min $= 0$ antas på randen $x=0$ och rand $y=0$.