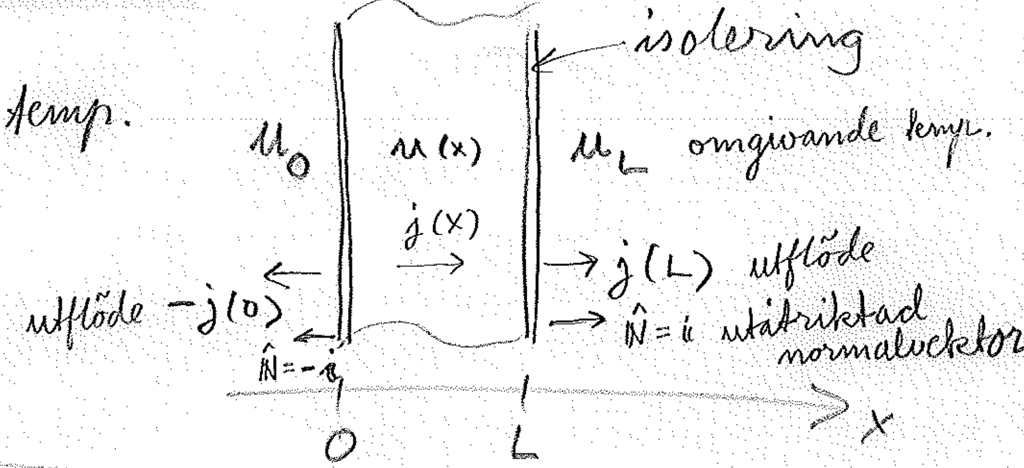
Randvärdesproblem i 1-D

1. Värmeledningsekvationen

$u = u(x)$ [K] temp. vid x [m].



$$\boxed{D(-a(x)Du(x)) = f(x), \quad x \in I = (0, L)}$$

Här är

- $D = \frac{d}{dx}$ $\left[\frac{1}{m}\right]$
- $f(x)$ $\left[\frac{J}{m^3 s}\right]$ värmekälltäthet
- $u(x)$ [K] temperatur
- $a(x)$ $\left[\frac{J}{mKs}\right]$ värmeledningskoefficient
- $j(x) = -a(x)Du(x)$ $\left[\frac{J}{m^2 s}\right]$ värmeflödestäthet i x-riktningen (Fouriers lag)

2. Randvillkor

Vid $x = L$:

$$j(L) = k_L(u(L) - u_L) \quad \text{(utåt!)}$$

med

u_L [K] omgivande temp.

$u(L)$ [K] temp. på insidan

k_L $\left[\frac{J}{m^2Ks}\right]$ koefficient

Fouriers lag: $j(L) = -a(L)Du(L)$

Alltså:

$$-a(L)Du(L) = k_L(u(L) - u_L)$$

dvs

$$aDu + k_L(u - u_L) = 0 \quad \text{för } x = L.$$

Vid $x = 0$:

$$-j(0) = k_0(u(0) - u_0) \quad \text{(utåt!)}$$

$$j(0) = -a(0)Du(0)$$

Alltså: $-a(0)Du(0) = k_0(u(0) - u_0)$

Alltså:

$$\boxed{aD_N u + k(u - u_A) = 0 \quad \text{för } x = 0, L}.$$

$$D_N = \begin{cases} -\frac{d}{dx} & \text{vid } x = 0 \\ \frac{d}{dx} & \text{vid } x = L \end{cases} \qquad u_A = \begin{cases} u_0 \\ u_L \end{cases}, \quad k = \begin{cases} k_0 \\ k_L \end{cases}$$

$D_N = \hat{N} \cdot \nabla$ riktningsderivata, $\hat{N} = \begin{cases} -\mathbb{1}, & x = 0 \\ \mathbb{1}, & x = L \end{cases}$

Specialfall 1 $k=\infty$ ingen isolering

$$\frac{1}{k} a D_N u + u - u_A = 0$$

$k \to \infty$: $u - u_A = 0$

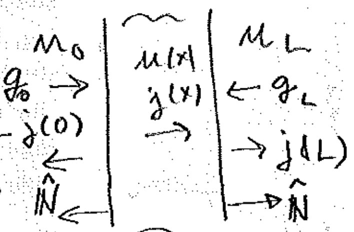
$$\boxed{u = u_A \quad \text{i } x=0 \text{ eller } x=L}$$

Specialfall 2: $k=0$ perfekt isolering

$$a D_N u = 0$$

$$\boxed{D_N u = 0 \quad \text{i } x=0 \text{ eller } x=L}$$

3. Randvärdesproblem



Finn $u = u(x)$ sådan att

$$\begin{cases} -D(aDu) = f & \text{för } x \in I \\ a D_N u + k(u - u_A) = g & \text{för } x = 0, L. \end{cases}$$

Kan i princip lösas genom att integrera två gånger och bestämma de två konstanterna med de två randvillkoren. (Oftast omöjliga räkningar. FEM!)

Enkelt exempel

$$\begin{cases} -D(5Du) = 0 \quad i \ I = (0,1) \\ -5Du(0) + 3(u(0) - 2) = 0 \quad (\text{isolering}) \\ u(1) = 0 \quad (\text{ingen isolering}) \end{cases}$$

Integrera: $\quad -5Du(x) = C_1$

(Känna igen: $k_0 = 3,\ u_0 = 2,\ a = 5,\ g_0 = 0$; $k_1 = \infty,\ u_1 = 0 \quad f = 0,\ g_1 = 0$)

$$Du(x) = -\frac{1}{5} C_1$$

$$u(x) = -\frac{1}{5} C_1 x + C_2$$

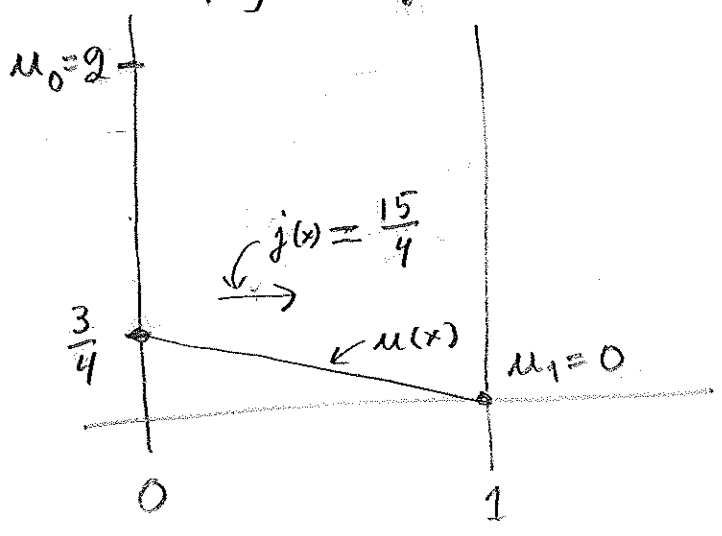
Randvillkor:

$$\begin{cases} 0 = -5Du(0) + 3(u(0) - 2) = C_1 + 3C_2 - 6 \\ 0 = u(1) = -\frac{1}{5} C_1 + C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + 3C_2 = 6 \\ -C_1 + 5C_2 = 0 \end{cases} \quad (+1) \qquad \begin{cases} C_1 + 3C_2 = 6 \\ 8C_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 6 - 3C_2 = 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4} \\ C_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$u(x) = -\frac{3}{4} x + \frac{3}{4}, \qquad j(x) = -5Du(x) = C_1 = \frac{15}{4}$$



Svag formulering

FEM bygger på svag formulering.

Differentialekvationen:

$$-D(aDu) = f$$

Multiplicera med $v = v(x)$ och integrera:

$$\int_0^L f v \, dx = -\int_0^L D(aDu) v \, dx =$$

$$= \{\text{part. int.}\} = -\left[a Du \, v\right]_0^L + \int_0^L a Du Dv \, dx$$

$$= \{\text{randvillkor}\} = \underbrace{-a(L)Du(L)}_{= k_L(u(L)-u_L)-g_L} v(L) +$$

$$+ \underbrace{a(0)Du(0)}_{= k_0(u(0)-u_0)-g_0} v(0) + \int_0^L a Du Dv \, dx$$

$$= \left(k_L(u(L)-u_L)-g_L\right) v(L)$$

$$+ \left(k_0(u(0)-u_0)-g_0\right) v(0) + \int_0^L a Du Dv \, dx$$

Samla u-termer i VL och f, g, u_A i HL:

$$\int_0^L a Du Dv \, dx + k_0 u(0) v(0) + k_L u(L) v(L) =$$

$$= \int_0^L f v \, dx + (k_0 u_0 + g_0) v(0) + (k_L u_L + g_L) v(L)$$

Svag form

Finn $u = u(x)$ sådan att

$$\int_0^L a\,Du\,Dv\,dx + k_0 u(0) v(0) + k_L u(L) v(L) =$$

$$= \int_0^L f v\,dx + (k_0 u_0 + g_0) v(0) + (k_L u_L + g_L) v(L)$$

för alla testfunktioner v.

Randvillkoret $u = u_A$ $(k = \infty)$ är

speciellt: man måste välja $v = 0$ i den ändpunkt där $u = u_A$.
Då försvinner motsvarande term $v(0)=0$ eller $v(L)=0$ i svaga ekv.

Exempel

$$\begin{cases} -D(5Du) = x & i\ (0,1) \\ -5Du(0) + 3(u(0)-2) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Svag form: Finn $u = u(x)$ sådan att $u(1) = 0$ och

$$\int_0^1 5\,u'(x)\,v'(x)\,dx + 3u(0)v(0) = \int_0^1 x\,v(x)\,dx + 6v(0)$$

för alla v med $v(1) = 0$.