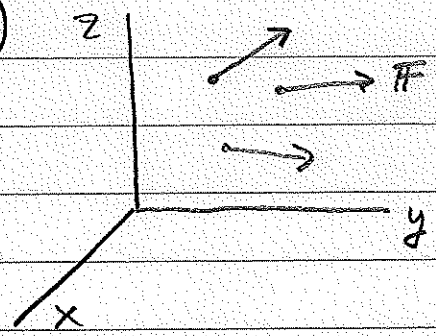
FÖ 6.1 15.1 sid 859-862, 15.2 sid 866-868,

Vektorfält 15.1

Vektorfält i rummet:

$$\mathbb{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\mathbb{i} + F_2(x,y,z)\,\mathbb{j} + F_3(x,y,z)\,\mathbb{k}$$

(I varje punkt sitter en pil.)



Även: $\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3)$

Skalärt fält: $f(x,y,z)$ (I varje punkt ett tal.)

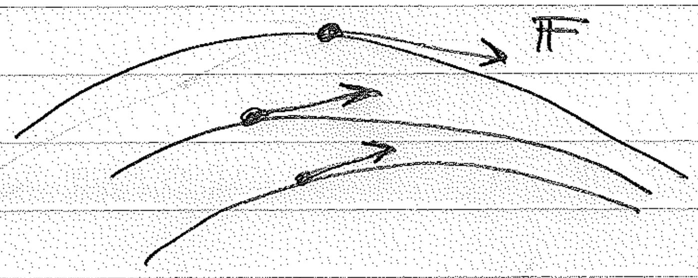
Exempel

- temperaturfält: $T(x,y,z)$ $[K]$ (skalärt)
- hastighetsfält i strömning: $\mathbb{v}(x,y,z)$ $\left[\frac{m}{s}\right]$
- temperaturgradient: $\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \left[\frac{K}{m}\right]$
- kraftfält: $\mathbb{F}(x,y,z)$ $[N]$

  $\mathbb{F}(x,y,z) = -mg\,\mathbb{k}$ tyngdkraftfältet

Fältlinjer (strömlinjer, kraftlinjer, ...)

är kurvor sådana att $\mathbb{F}(x,y,z)$ är tangent till den kurvan som går genom (x,y,z).



Sådan kurva $\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ ges av

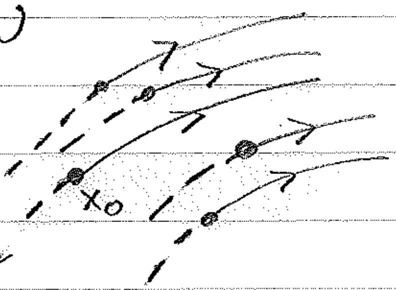
$$\frac{d\mathbb{r}}{dt} = \lambda(t)\,\mathbb{F}(\mathbb{r}(t))$$

(Genom att välja $\lambda(t)$ kan vi ändra farten av partikeln som rör sig längs kurvan.)

Detta är ett system av ODE.

Löses med Matlab:

```
>> F = @(t,x) (lambda(t)*[F1(x); F2(x); F3(x)]);
>> [t,X] = ode23(F, [0,T], X0);
>> plot3(t,X)
```



Löser begynnelsevärdesproblem (framåt).

En annan metod är att eliminera t:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda(t)\, F_1(x(t), y(t), z(t)) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \lambda(t)\, F_2(x(t), y(t), z(t)) \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = \lambda(t)\, F_3(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

$$\lambda(t)\, dt = \frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}$$

dvs

$$\boxed{\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}}$$

Ibland kan man separera variablerna, dvs skriva på formen

$$P(x)\, dx = Q(y)\, dy = R(z)\, dz$$

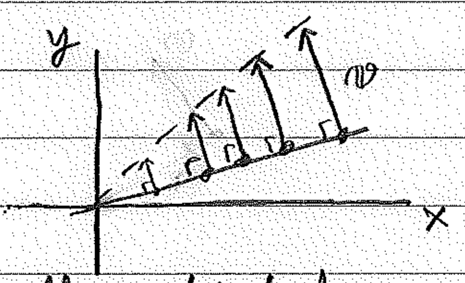
Då kan man lösa ekvationerna genom att integrera.

Exempel Rotation kring z-axeln.
$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ med $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$,

$$\mathbf{v}(x,y) = \Omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \left[\frac{m}{s}\right], \quad \Omega > 0 \left[\frac{1}{s}\right]$$

Obs att farten är $v = |\mathbf{v}| = \Omega\sqrt{y^2+x^2} = \Omega r$

och att $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$.



Detta är hastighetsfältet för stelkroppsrotation med vinkelhastighet $\Omega \left[\frac{1}{s}\right]$

Strömlinjerna ges av

$$\frac{dx}{-\Omega y} = \frac{dy}{\Omega x} \quad \text{dvs} \quad -\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

Separera variablerna:

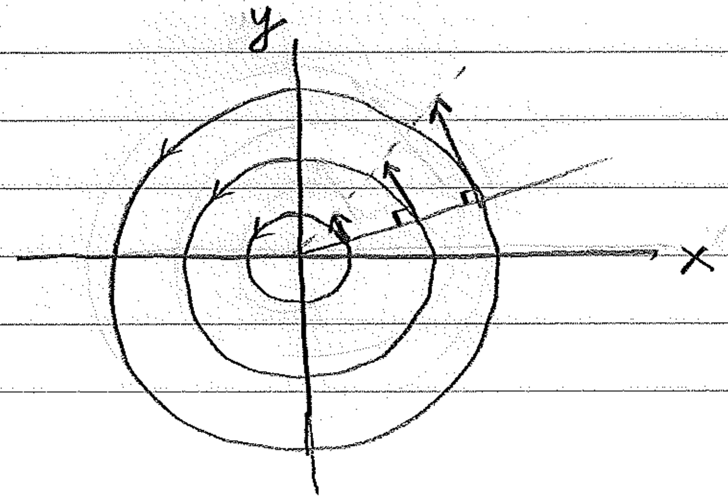
$$x\,dx = -y\,dy$$

Integrera: $\int x\,dx = -\int y\,dy$

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}y^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

Strömlinjerna är cirklar med centrum i origo.



Konservativa fält (15.2 sid 866–868)

Definition

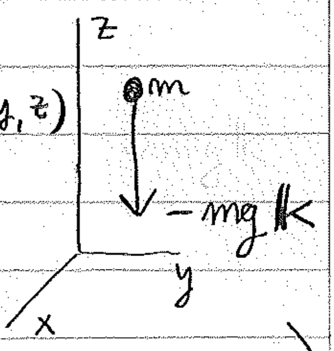
Om $\mathbb{F} = \nabla\phi$ i området D så är $\mathbb{F}$ ett <u>konservativt fält</u> i D och funktionen ϕ kallas <u>potential</u> till $\mathbb{F}$ i D.

(I mekanik och ellära skrivs $\mathbb{F} = \overset{\text{obs}}{-}\nabla\phi$, så att kraften $\mathbb{F}$ pekar dit potentialen ϕ minskar.)

<u>Exempel</u> Tyngdkraftfältet

$$\mathbb{F}(x,y,z) = -mg\,\mathbb{k} = +\nabla\phi(x,y,z)$$

$$\phi(x,y,z) = -mgz$$



(I mekanik: $\phi(x,y,z) = \overset{\text{obs}}{+}mgz$, $\mathbb{F} = -\nabla\phi = -mg\mathbb{k}$)

Potentialen ges av ekv.: $\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = -mg \end{cases} \Rightarrow \phi = -mgz + C$

Hur testa om $\mathbb{F}$ är konservativt?

Här är ett nödvändigt villkor.

Antag att $\mathbb{F}$ är konservativt, dvs $\mathbb{F} = \nabla\phi$ i D.
Då gäller:
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Men $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ så att $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$.

På samma vis får vi

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad \text{i } D}$$

Dessa villkor är nödvändiga men inte tillräckliga.

Ytterligare villkor på D behövs för att garantera att $\mathbb{F}$ är konservativt i D.

Se Sats 4 i 16.2.

Om potentialen finns kan den bestämmas genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = F_3 \end{cases}$$

<u>Exempel</u> $\mathbf{v}(x,y,z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial v_2}{\partial x} = 1$$

ej konservativt.

<u>Exempel</u> $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ okej

Försök hitta en potential:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = x \\[1ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = y \\[1ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + f(y,z) \\ \phi(x,y,z) = \frac{1}{2}y^2 + h(x,z) \\ \phi(x,y,z) = k(x,y) \end{cases}$$

Välj $f(y,z) = \frac{1}{2}y^2 + C$, $h(x,z) = \frac{1}{2}x^2 + C$, $k(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C$

Då fås $\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$. Alltså: konservativt.