Kurvintegralen 15.3

Kurva på parameterform

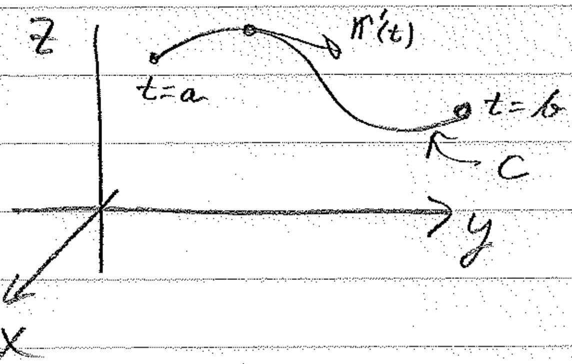
$$C: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in I = [a, b]$$

Kom ihåg båglängdselementet

$$ds = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

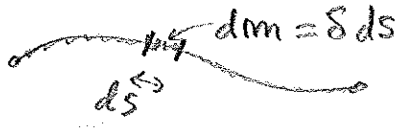
Kurvintegralen av f längs C är

$$\underbrace{\int_C f\, ds}_{\text{tecknas så}} = \underbrace{\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt}_{\text{beräknas så}}$$



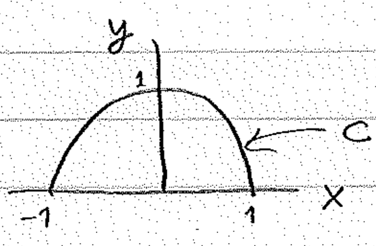
Exempel Massan av en tråd med variabel densitet $\delta(x,y,z)$ $\left[\frac{kg}{m}\right]$:

$$M = \int_C \delta\, ds = \int_a^b \delta(x(t), y(t), z(t)) \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt \quad [kg]$$



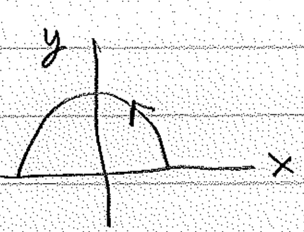
masselementet

Exempel $I = \int_C y\, ds$ där C är övre halvcirkeln.



1) Parametrisera kurvan:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$$

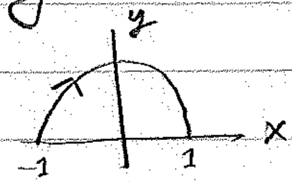


Tangent: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin(t)\,\mathbf{i} + \cos(t)\,\mathbf{j}$, $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$

Båglängdselementet: $ds = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt = dt$

Integralen: $I = \int_C y\, ds = \int_0^{\pi} \sin(t)\, dt = 2$

2) En annan parametrisering:



$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, \quad t \in [-1, 1]$$

Tangent: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathbf{j}$, $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$ds = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$

$$I = \int_C y\, ds = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

Viktigt: $\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$

beror ej på valet av parametrisering dvs alla parametriseringar av C ger samma resultat. Vi bevisar inte detta, men vi såg att det stämde i förra exemplet.

Kurvan C och $\int_C f\,ds$ har <u>ingen riktning</u> i sig själv.

Men när vi valt en parametrisering så genomlöps kurvan i en viss <u>riktning</u> som bestäms av parametriseringen.

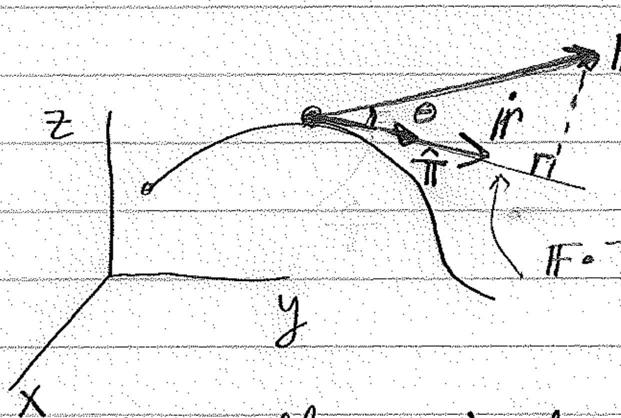
Även <u>farten</u> bestäms av parametriseringen.

Tangentkurvintegralen 15.4

Kom ihåg kurvintegralen av skalärt fält f:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbb{r}(t))\left|\frac{d\mathbb{r}}{dt}\right| dt$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\,dt$$



(tangenten $\dot{\mathbb{r}} = \frac{d\mathbb{r}}{dt}$)

$\mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{T}} = |\mathbb{F}| \cos\theta$

Tangentkurvintegralen av vektorfält $\mathbb{F}$:

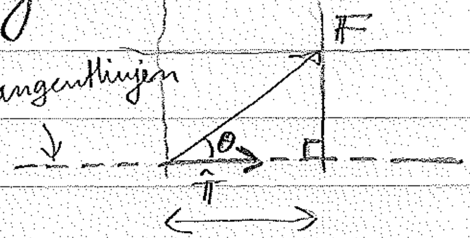
$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_a^b \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbb{r}}{dt}\,dt$$

Obs att

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_a^b \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot \underbrace{\frac{\dot{\mathbb{r}}(t)}{|\dot{\mathbb{r}}(t)|}}_{=\hat{\mathbb{T}}(t)} \underbrace{|\dot{\mathbb{r}}(t)|\,dt}_{=ds}$$

enhetstangenten

$$= \int_C \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{T}}\,ds,$$



$\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{T}} = |\mathbb{F}|\cos\theta$

där $\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{T}}$ är skalära projektionen av $\mathbb{F}$ på tangentriktningen, dvs tangentkomponenten av $\mathbb{F}$.

Vektorbåglängdselementet:

$$d\mathbb{r} = \frac{d\mathbb{r}}{dt}\,dt = \hat{\mathbb{T}}\,ds$$

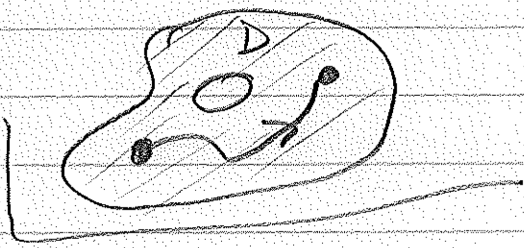
Exempel (Arbete) $\mathbb{F}$ kraftfält [N].
Arbetet som uträttas då en partikel rör sig längs C i fältet $\mathbb{F}$ är

$$W = \int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_C \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{T}}\,ds. \quad [Nm]$$

C är sluten : 

C är enkel = korsar inte sig själv

D är ett sammanhängande område (connected) om varje par av punkter kan förbindas med en kurva i D.

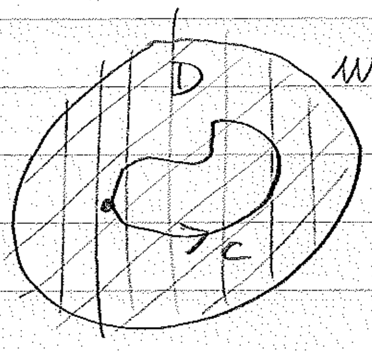


Ej sammanhängande: 

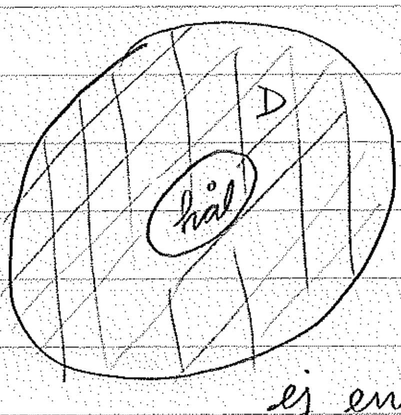
två delar

D är enkelt sammanhängande (simply connected) om varje enkel sluten kurva C i D kan krympas kontinuerligt till en punkt utan att lämna D. Då finns en yta i D vars rand är C.

Exempel I planet:



utan hål

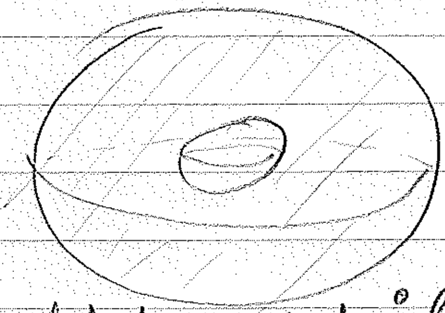


skiva med hål

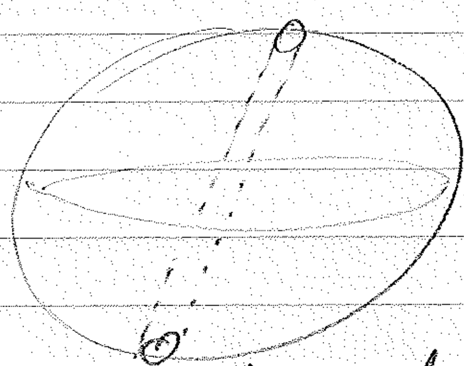
enkelt s.h.

ej enkelt s.h.

I rummet:



klot med hål
enkelt s.h.



genomborrat klot
ej enkelt s.h.

Typiskt: D definitionsmängd, hål i D är de punkter där $\mathbb{F}$ ej deriverbar.

Ex. $\mathbb{F}(\mathbb{r}) = \dfrac{1}{|\mathbb{r}|}$, $D = \{\mathbb{r} \neq \mathbb{0}\}$

hål i origo.

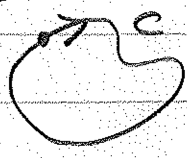
Sats 1 (Oberoende av vägen)

Antag $\mathbb{F}$ deriverbar i ett sammanhängande område D.

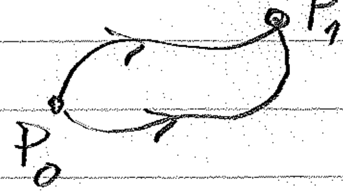
Då är följande påståenden ekvivalenta

(a) $\mathbb{F}$ är konservativt i D

(b) $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva i D.



(c) $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$ har samma värde för alla C i D som går från P_0 till P_1.



<u>Bevis</u> Vi bevisar bara (a) $\Rightarrow$ (c).

Antag då att $\mathbb{F}$ är konservativt dvs $\mathbb{F} = \nabla\phi$ i D.

Tag en kurva C från P_0 till P_1. Då blir

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_a^b \nabla\phi(\mathbb{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbb{r}}{dt}\, dt =$$

$$= \{\text{kedjeregeln}\} = \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(\mathbb{r}(t))\, dt =$$

$$= \Big[\phi(\mathbb{r}(t))\Big]_a^b = \phi(P_1) - \phi(P_0),$$

dvs integralen beror av P_1 och P_0 men inte C.

Obs: Arbetet av konservativt fält är lika med ändringen av potentialen:

$$W = \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0).$$

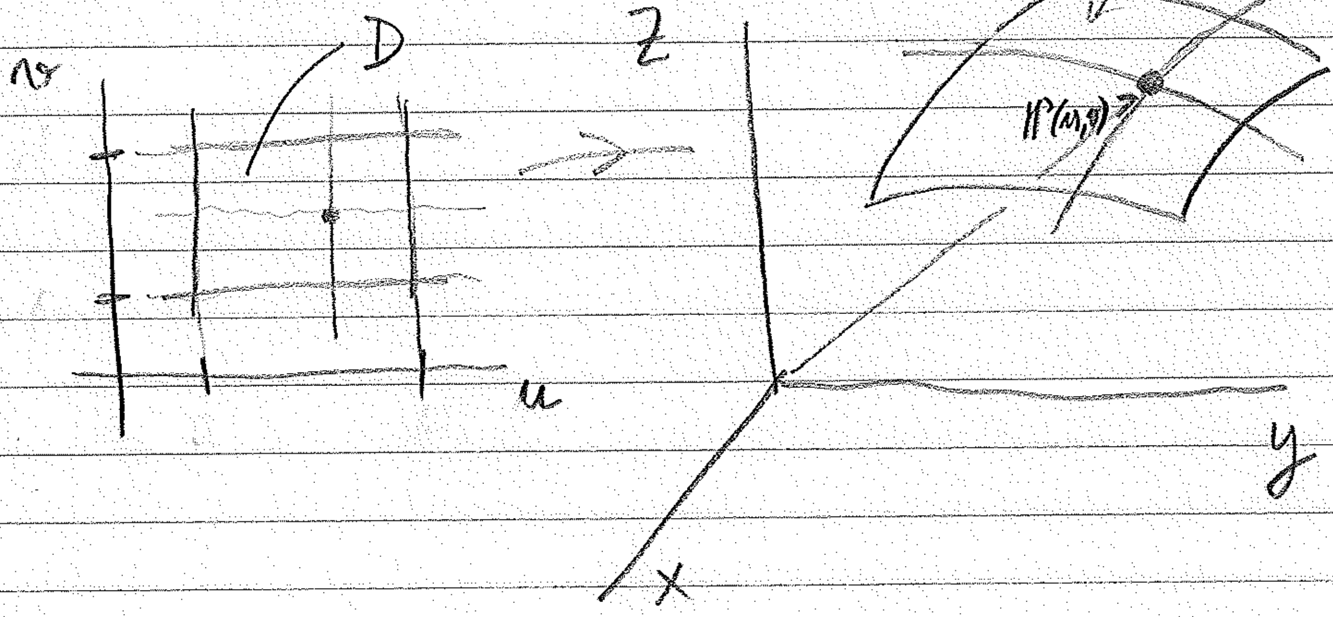
Ytintegral 15.5

Yta S på parameterform:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) \qquad (u,v) \in D$$

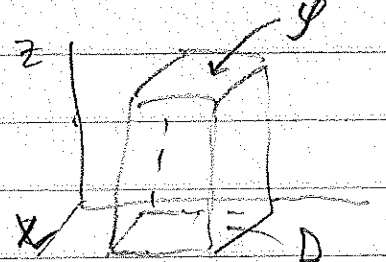
eller

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$



Exempel Graf $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$

Parametrisering:

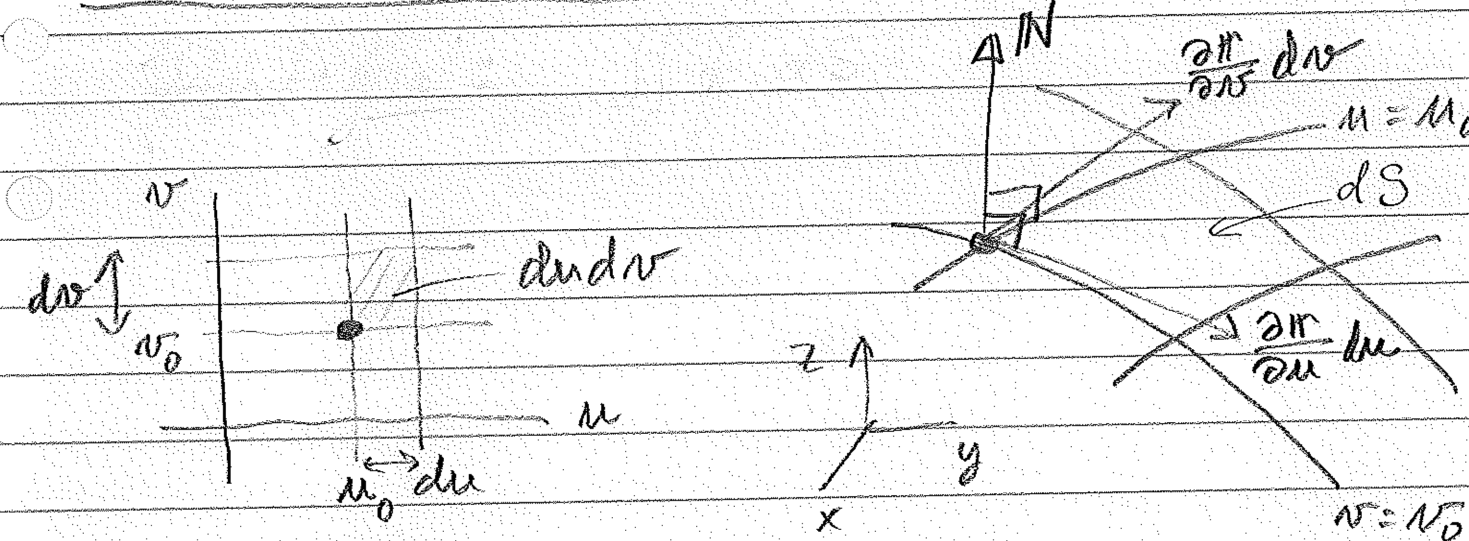


$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in D$$

Exempel Sfär $x^2+y^2+z^2=R^2$

Parametrisering i sfäriska koord
$(\rho = R)$

$$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta & 0\le\phi\le\pi \\ y = R\sin\phi\sin\theta & 0\le\theta\le 2\pi \\ z = R\cos\phi \end{cases}$$



Areaelementet:

$$dS = \left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv$$

Tangenter: $\frac{\partial r}{\partial u}(u_0,v_0)$ och $\frac{\partial r}{\partial v}(u_0,v_0)$.

En normalvektor:

$$\mathbb{N} = \frac{\partial r}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial r}{\partial v}(u_0,v_0)$$

ytintegralen: $\iint_{\mathcal{S}} f\,dS = \iint_D f(r(u,v))\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv$

Exempel Graf $z = f(x,y)$ $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$

Tangenter:

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \mathbf{i} + f_1'(u,v)\mathbf{k} \,, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \mathbf{j} + f_2'(u,v)\mathbf{k}$$

En normalvektor:

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_1' \\ 0 & 1 & f_2' \end{vmatrix} = -f_1'(u,v)\mathbf{i} - f_2'(u,v)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$dS = \sqrt{1 + f_1'(u,v)^2 + f_2'(u,v)^2}\, du\, dv$$

eller med x, y:

$$dS = \sqrt{1 + f_x'(x,y)^2 + f_y'(x,y)^2}\, dx\, dy$$

Flödesintegral 15.6

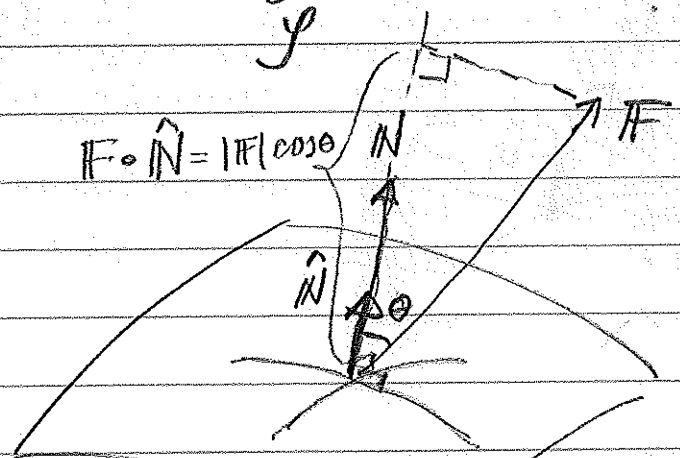
Ytan $\mathcal{S}$ är orienterbar om det finns normalvektorfält $\mathbb{N}(P)$ som varierar kontinuerligt när P rör sig på $\mathcal{S}$.

(Möbius band är ej orienterbar.)

Dvs ett entydigt val av upp/ned, in/ut på $\mathcal{S}$.

Då definierar vi flödesintegralen av vektorfältet $\mathbb{F}$ genom $\mathcal{S}$:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}}\, dS$$ (kallas även normalytintegral)



Skalära projektionen: $\mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}} = |\mathbb{F}| \cos\theta$

normalkomponenten av $\mathbb{F}$

Exempel Hastighetsfält $\mathbf{v}$.

$$\iint_{\mathcal{S}} \underbrace{\mathbf{v}}_{\left[\frac{m}{s}\right]} \cdot \hat{\mathbf{N}} \underbrace{dS}_{[m^2]} = \text{volymsflöde } \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \underbrace{\delta}_{\left[\frac{kg}{m^3}\right]} \underbrace{\mathbf{v}}_{\left[\frac{m}{s}\right]} \cdot \hat{\mathbf{N}} \underbrace{dS}_{[m^2]} = \text{massflöde } \left[\frac{kg}{s}\right]$$

Här är $\delta \mathbf{v} \left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$ massflödestäthet.

I allmänhet: $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}$ flödestäthet

Normalytelementet: $\mathbf{N} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{val av upp/ned} \\ \text{in/ut}}}{\pm} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\, dS = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\, dv$$

$$= \pm \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du\, dv$$

Fyra element:

$$ds = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$$

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{T}}\, ds = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$$

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\, dv$$

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\, dS = \pm\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du\, dv$$