FÖ 8.2 (1

Linjär elasticitet

Ekvationerna för linjär elasticitet har samma matematiska form som ekvationerna för värmeledning. För jämförelse skriver jag de senare inom klammer $\{ \cdots \}$.

Jämviktsekvation: (konservering av impulsmoment)

$$(1) \quad -\nabla \cdot \sigma = K \quad i \ D$$

$$\{ \nabla \cdot F = f \ i \ D \}$$

På komponentform:

$$-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = K_i \ , \quad i = 1, \dots, 3$$

$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^{3}$ spänningstensorn $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

$\mathbb{K} = (K_i)_{i=1}^{3}$ volymskraft $\left[\frac{N}{m^3}\right]$

(t ex tyngdkraft)

<u>Konstitutiv</u> <u>lag</u> (materialets egenskaper): Hookes lag

(2) $\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\,\mathbb{I}$ $\quad \{\mathbb{F} = -a\nabla u\}$

På komponentform:

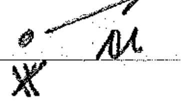
$$\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\left(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}\right)\delta_{ij}$$

$\mathbb{I} = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{3}$ enhetsmatrisen, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$

$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^{3}$ töjningstensorn $[1]$
dimensionslös

(3) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$u = (u_i)_{i=1}^{3}$ förskjutningsvektor $[m]$

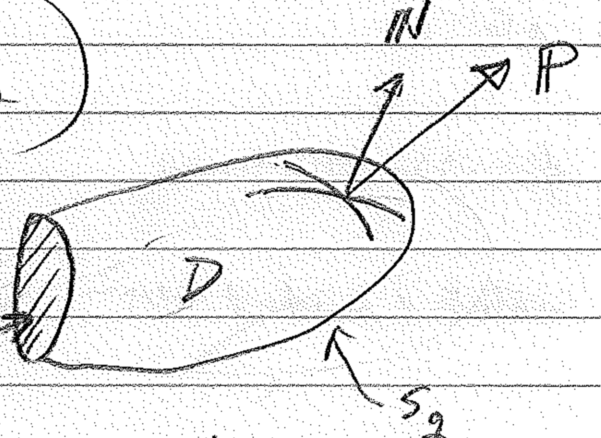


λ, μ Lamé-konstanter

Randvillkor:

$$\begin{cases} u = 0 & \text{på } S_1 \\ \sigma \hat{\mathbb{N}} = \mathbb{P} & \text{på } S_2 \end{cases} \qquad \{ \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} = k(u - u_A) - g \}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = P_i \quad \text{på } S_2 \right)$$



$S = S_1 \cup S_2$
utan överlapp

fast inspänd på S_1

$\sigma \hat{\mathbb{N}}$ normalkomponent av inre spänning

$\mathbb{P} = (P_i)_{i=1}^{3}$ pålagd ytkraft $\left[\frac{N}{m^2} \right]$

Om man sätter in (2), (3) i (1), så får man en PDE för förskjutningen u. Genom att integrera partiellt och använda randvillkoren, får man en svag formulering och FEM.

14.7 Endast "Moments and Centres of Mass".
sid 850 − 854

<u>Masscentrum</u>: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ där

$$\bar{x} = \frac{\iiint_R x\,\delta(x,y,z)\,dV}{\iiint_R \delta(x,y,z)\,dV}$$

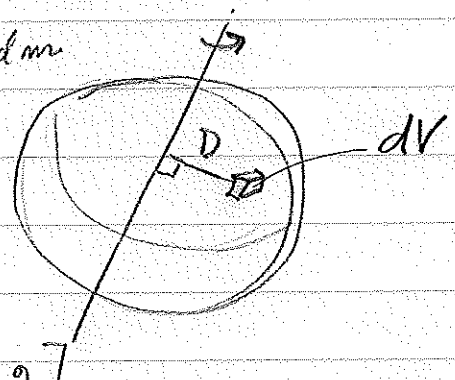
δ = masstäthet = densitet $[kg/m^3]$

osv.

På vektorform: $$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\iiint_R \mathbf{r}\,\delta\,dV}{\iiint_R \delta\,dV} = \frac{\iiint_R \mathbf{r}\,dm}{\iiint_R dm}$$

<u>Tröghetsmoment</u> m.a.p. axel:

$$I = \iiint_R D^2(x,y,z)\,\delta(x,y,z)\,dV = \iiint_R D^2\,dm$$



D = avståndet till axeln

I har enheten $[kg\,m^2]$.

$$dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \qquad \left(\text{obs: } \sin\phi \geq 0\right)$$

Exempel. Tröghetsmomentet för klot med radie R m.o.p. z-axeln: $\left(\begin{matrix}\delta = \text{masstäthet} \\ \left[\frac{kg}{m^3}\right]\end{matrix}\right)$

$$I = \iiint_B (x^2+y^2)\delta \, dV = \delta \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} (\rho \sin\phi)^2 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \delta \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{\pi} \sin^3\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta = \left\{\begin{matrix} u = -\cos\phi \\ du = +\sin\phi \, d\phi \\ \sin^2\phi = 1-u^2 \\ \phi=0 \Rightarrow u=-1, \phi=\pi \Rightarrow u=1 \end{matrix}\right\}$$

$$= \delta \frac{R^5}{5} \cdot \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du \cdot 2\pi = \delta \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{8\pi}{15} \delta R^5$$

δ = masstäthet = konstant $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

$\delta R^5 \quad \left[\frac{kg}{m^3} m^5\right] = \left[kg \, m^2\right]$