MVE255 Matematisk analys i flera variabler M

FEM2: Randvärdesproblem och finita elementmetoden i flera variabler

[1]

1.1 Partiell integration

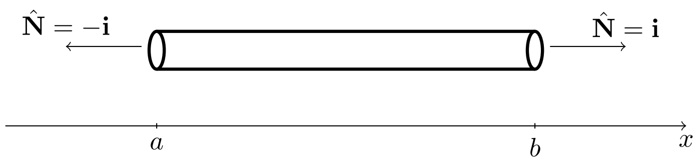
Kom ihåg att finita elementmetoden bygger på den *svaga formuleringen* av *randvärdesproblemet* och att den svaga formuleringen bygger på *partiell integration*. Partiell integration bygger i sin tur på *differential- och integralkalkylens fundamentalsats* och *produktderivering*.

Fundamentalsatsen (*The Fundamental Theorem of Calculus*), Theorem 5 i Adams 5.5, säger att

$$\int_a^b \mathrm{D}u(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\Big]_a^b = u(b) - u(a).$$

Obs att insättningstermen $\Big[u(x)\Big]_a^b = u(b) - u(a)$ har plustecken i intervallets högra randpunkt b och minustecken i den vänstra randpunkten a. Tecknet kommer från den *utåtriktade enhetsnormalen*:

$$\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{i} \text{ vid } x = a, \quad \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{i} \text{ vid } x = b.$$



Figur 1: Utåtriktade enhetsnormaler.

Produktderiveringsregeln säger att

$$\mathrm{D}(uv) = \mathrm{D}u\, v + u\, \mathrm{D}v.$$

Tillsamman med fundamentalsatsen ger detta

$$\Big[uv\Big]_a^b = \int_a^b \mathrm{D}(uv)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{D}u\, v\,\mathrm{d}x + \int_a^b u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x,$$

dvs *partiell integration*

$$\int_a^b \mathrm{D}u\, v\,\mathrm{d}x = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x.$$

Obs hur derivatan D flyger över från u till v och att insättningstermen inte innehåller någon derivata.

Vi behöver en flervariabelversion av detta. Det finns flera versioner av fundamentalsatsen och produktderivering, se formelsamlingen på insidan av pärmen i Adams. Vi väljer följande.

[1] 17 maj 2015, Stig Larsson, Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola

Fundamentalsats: **Gauss divergenssats** (Theorem 8 i Adams 16.4)

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}S. \tag{1}$$

Här är D ett område med orienterad, sluten randyta S och $\hat{\mathbf{N}}$ det utåtriktade enhetsnormalvektorfältet till S.

Satsen relaterar integralen av divergensen $\nabla \cdot \mathbf{F}$ av vektorfältet $\mathbf{F}$ i D till det utåtriktade flödet av $\mathbf{F}$ genom randen S. Flödesintegralen $\iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}S = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S$ motsvarar insättningstermen $\Big[u(x)\Big]_a^b$ i den vanliga fundamentalsatsen. Obs att vektorn ∇ i vänsterledet ersätts av vektorn $\hat{\mathbf{N}}$ i högerledet.

Produktderivering: (Theorem 3 (b) i Adams 16.2)

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{F} + \phi \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Tillsammans med divergenssatsen ger detta

$$\iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \phi \, \mathrm{d}S = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot (\phi \mathbf{F}) \, \mathrm{d}S = \iiint_D \nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) \, \mathrm{d}V = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \phi \, \mathrm{d}V + \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla \phi \, \mathrm{d}V,$$

dvs *partiell integration*

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \phi \, \mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \phi \, \mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla \phi \, \mathrm{d}V. \tag{2}$$

Obs hur nabla-operatorn ∇ flyger över från $\mathbf{F}$ till ϕ och att flödesintegralen $\iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \phi \, \mathrm{d}S$ inte innehåller någon derivata. Vektorn ∇ ersätts av $\hat{\mathbf{N}}$ i flödesintegralen.

1.2 Härledning av värmeledningsekvationen

Vi ska härleda värmeledningsekvationen. Härledningen bygger på en konserveringslag, som uttrycker att en viss kvantitet bevaras, samt en konstitutiv lag, som beskriver materialets egenskaper.

Vi studerar stationär tidsoberoende värmeledning i en kropp D i rummet med begränsningsytan S. Vi inför följande beteckningar:

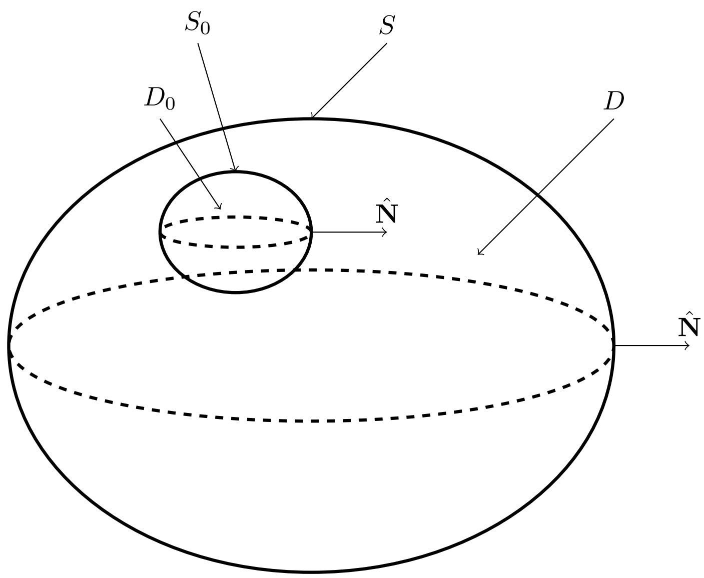
$u(x, y, z)$ temperaturen `[K]` i punkten (x, y, z) `[m]`,
$\mathbf{F}(x, y, z)$ värmeflödestäthet (vektorfält) $\texttt{[J/(m}^2\texttt{s)]}$,
$a(x, y, z)$ värmeledningskoefficient `[J/(m K s)]`,
$f(x, y, z)$ källtäthet för inre värmekällor $\texttt{[J/(m}^3\texttt{s)]}$,
$u_{\mathrm{A}}(x, y, z)$ omgivningens temperatur ("ambient temperature") `[K]`,
$k(x, y, z)$ värmeöverföringskoefficient för det isolerande ytskiktet $\texttt{[J/(m}^2\texttt{ s K)]}$,
$g(x, y, z)$ flödestäthet för värmekällor på ytan $\texttt{[J/(m}^2\texttt{ s)]}$.

Konserveringslag: energiprincipen. Vi betraktar värmebalansen i en godtycklig delvolym D_0 med begränsningsytan S_0. Nettoflödet av värme ut genom S_0 är $\iint_{S_0} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S$ `[J/s]`. Här är $\hat{\mathbf{N}}$ den utåtriktade enhetsnormalen till ytan S_0. Energiprincipen säger att värmeflödet ut genom S_0 är lika med värmeproduktionen per tidsenhet inuti D_0, dvs $\iiint_{D_0} f \, \mathrm{d}V$ `[J/s]`. Alltså

$$\iint_{S_0} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S = \iiint_{D_0} f \, \mathrm{d}V.$$

Vi tillämpar nu divergenssatsen (1) på vektorfältet $\mathbf{F}$:

$$\iint_{S_0} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S = \iiint_{D_0} \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V,$$



Figur 2: Kropp D med godtycklig delvolym D_0.

vilket leder till

$$\iiint_{D_0} \big(\nabla \cdot \mathbf{F} - f\big)\,\mathrm{d}V = 0.$$

Eftersom $D_0 \subset D$ är godtycklig, så måste integranden vara identiskt lika med noll, $\nabla \cdot \mathbf{F} - f = 0$, dvs

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = f \quad \text{i } D. \tag{3}$$

Här har vi använt att en kontinuerlig funktion v som uppfyller att $\iiint_{D_0} v\,\mathrm{d}V = 0$ för alla $D_0 \subset D$, måste vara identiskt noll, dvs $v = 0$ i D. För om $v(P) \neq 0$, till exempel om $v(P) > 0$, så måste $v > 0$ även i en omgivning av P. Välj då D_0 att vara denna omgivning, så fås $\iiint_{D_0} v\,\mathrm{d}V > 0$, vilket strider mot antagandet att $\iiint_{D_0} v\,\mathrm{d}V = 0$ för alla D_0.

Konstitutiv lag: Fouriers lag. Denna säger att värmeflödestätheten är proportionell mot temperaturgradienten och att värme strömmar från varmt till kallt. Därför blir flödestätheten

$$\mathbf{F} = -a\nabla u = -a\,\mathbf{grad}\,u. \tag{4}$$

Om vi sätter in detta i (3) får vi

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) = f \quad \text{i } D. \tag{5}$$

Detta är **värmeledningsekvationen**.

Ekvation (5) måste kombineras med ett **randvillkor**, som uttrycker att värmeflödet genom randen är proportionellt mot temperaturdifferensen, plus eventuellt bidrag från värmekällor på randen. Värmeflödestätheten **ut** genom randen blir då

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = k(u - u_\mathrm{A}) - g \quad \text{på } S,$$

där u är temperaturen på insidan av randytan, u_A är omgivningens temperatur ("ambient temperature"), k är värmeöverföringskoefficienten för det isolerande ytskiktet, och g är tätheten för ett föreskrivet **in**flöde. Enligt Fouriers lag (4) har vi

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = -a\nabla u \cdot \hat{\mathbf{N}} = -a\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u \quad \text{på } S,$$

där $\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u = \hat{\mathbf{N}} \cdot \nabla u$ betecknar normalderivatan av u, dvs riktningsderivatan i normalriktningen $\hat{\mathbf{N}}$. Därför blir randvillkoret

$$a\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g \quad \text{på } S. \qquad \text{(Robins randvillkor)} \tag{6}$$

Gränsfallet $k = 0$ svarar mot att begränsningsytan är isolerad:

$$a\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u = g \quad \text{på } S, \qquad \text{(Neumanns randvillkor)}$$

och, om även $g = 0$,

$$\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u = 0 \quad \text{på } S. \qquad \text{(Neumanns randvillkor)}$$

Om vi å andra sidan dividerar med k i (6),

$$\frac{1}{k} a\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u + (u - u_{\mathrm{A}}) = \frac{1}{k} g,$$

och sedan låter $k \to \infty$, får vi

$$u = u_{\mathrm{A}} \quad \text{på } S. \qquad \text{(Dirichlets randvillkor)}$$

Gränsfallet $k = \infty$ betyder alltså att begränsningsytan är helt oisolerad, dvs värme kan obehindrat strömma genom ytan och kroppens yttemperatur blir då lika med omgivningens temperatur.

Vi har nu ett **randvärdesproblem**: Finn $u = u(x, y, z)$ sådan att

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) = f & \text{i } D, \\ a\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g & \text{på } S. \end{cases}$$

Poissons ekvation

Om a är konstant får vi

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = -a \nabla \cdot \nabla u = -a \Delta u,$$

där

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

är **Laplace-operatorn**. Värmeledningsekvationen blir då (med $a = 1$)

$$-\Delta u = f \quad \text{i } D,$$

vilken kallas **Poissons ekvation**. Om $f = 0$ får vi **Laplaces ekvation**:

$$-\Delta u = 0 \quad \text{i } D.$$

Andra beteckningar

Vi har använt Adams beteckningar. I andra böcker betecknas den utåtriktade enhetsnormalen $\mathbf{n}$ eller n och normalderivatan skrivs $\frac{\partial u}{\partial n}$.

1.3 Svag formulering

Vi har ett

Randvärdesproblem. Finn $u = u(x, y, z)$ sådan att

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) = f & \text{i } D, \\ a\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g & \text{på } S. \end{cases} \tag{7}$$

Vi multiplicerar med en testfunktion v och integrerar partiellt, dvs vi använder (2) med $\mathbf{F} = a\nabla u$ och $\phi = v$:

$$\iiint_D fv\,\mathrm{d}V = -\iiint_D \nabla\cdot(a\nabla u)v\,\mathrm{d}V = -\iint_S \hat{\mathbf{N}}\cdot(a\nabla u)v\,\mathrm{d}S + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V.$$

I flödesintegralen använder vi randvillkoret:

$$\hat{\mathbf{N}}\cdot(a\nabla u) = a\,\hat{\mathbf{N}}\cdot\nabla u = a\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u = g - k(u - u_{\mathrm{A}}).$$

Det leder till

$$\iiint_D fv\,\mathrm{d}V = -\iint_S gv\,\mathrm{d}S + \iint_S kuv\,\mathrm{d}S - \iint_S ku_{\mathrm{A}}v\,\mathrm{d}S + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V.$$

Vi samlar termer med u i vänsterledet:

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V + \iint_S kuv\,\mathrm{d}S = \iiint_D fv\,\mathrm{d}V + \iint_S (g + ku_{\mathrm{A}})v\,\mathrm{d}S.$$

Den svaga formuleringen. Finn $u = u(x, y, z)$ sådan att

(8) $$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V + \iint_S kuv\,\mathrm{d}S = \iiint_D fv\,\mathrm{d}V + \iint_S (g + ku_{\mathrm{A}})v\,\mathrm{d}S$$

för alla testfunktioner v.

Dirichlets randvillkor är speciellt: om $u = u_{\mathrm{A}}$ på en del S_1 av randen S (eventuellt hela S), så måste vi välja testfunktioner v med $v = 0$ på S_1. Den svaga formuleringen blir då:

Den svaga formuleringen. Finn $u = u(x, y, z)$ med $u = u_{\mathrm{A}}$ på S_1 och sådan att

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V + \iint_{S_2} kuv\,\mathrm{d}S = \iiint_D fv\,\mathrm{d}V + \iint_{S_2} (g + ku_{\mathrm{A}})v\,\mathrm{d}S$$

för alla testfunktioner v med $v = 0$ på S_1.

Här är S_2 resten av S, dvs $S_2 = S\backslash S_1$. Det betyder att $S = S_1 \cup S_2$ delas upp i icke överlappande delar.

1.4 Finita elementmetoden i 2-D

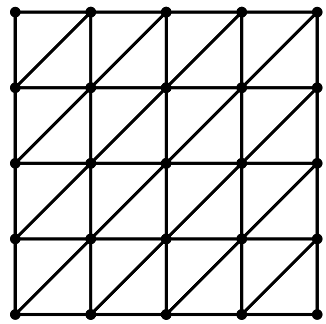
Låt D vara ett område i planet och skapa ett triangulärt beräkningsnät i D.

Nätet består av

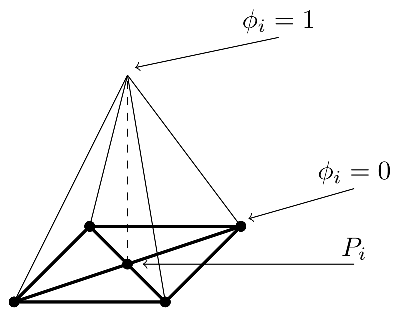
N punkter $\{P_i\}_{i=1}^N$,
M trianglar $\{T_j\}_{j=1}^M$,
L kanter (*edges*) $\{E_l\}_{l=1}^L$.

En *kontinuerlig och styckvis linjär funktion* $U(x, y)$ är av formen $U(x, y) = a + bx + cy$ inuti varje triangel och hopskarvad till en kontinuerlig funktion. En sådan funktion bestäms entydigt av sina nodvärden $U(P_i)$:

(9) $$U(x, y) = \sum_{i=1}^N U_i\phi_i(x, y), \quad U_i = U(P_i).$$



Figur 3: Triangulärt beräkningsnät i plant område D.



Figur 4: Basfunktion (”pyramidfunktion”).

Basfunktionerna $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ är kontinuerliga styckvis linjära funktioner och bestäms av

$$\phi_i(P_j) = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j, \\ 0, & \text{om } i \neq j. \end{cases}$$

Hur ska vi bestämma de okända nodvärdena $U_i = U(P_i)$ så att $U(x,y) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x,y)$ blir en approximativ lösning till randvärdesproblemet? Vi kan inte sätta in U i den ursprungliga formuleringen (7) för U har inte två derivator. Istället använder vi den svaga formuleringen, se (8),

$$\iint_D a \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}A + \int_C kuv \, \mathrm{d}s = \iint_D fv \, \mathrm{d}A + \int_C (g + ku_\mathrm{A}) v \, \mathrm{d}s$$

för alla testfunktioner v. Eftersom vi nu arbetar i planet har vi bytt ut volymselementet $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ mot areaelementet $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ och istället för en ytintegral över begränsningsytan har vi en kurvintegral längs randkurvan C till området D.

Här sätter vi in $U(x,y) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x,y)$ och $v = \phi_j$. För enkelhets skull genomför vi detta endast för fallet $k = 0$, $g = 0$. Vi får

$$\iint_D a \nabla \Big(\sum_{i=1}^N U_i \phi_i \Big) \cdot \nabla \phi_j \, \mathrm{d}A = \iint_D f \phi_j \, \mathrm{d}A, \quad j = 1, \dots, N.$$

Vi bryter ut koefficienterna U_i:

$$\sum_{i=1}^N U_i \underbrace{\iint_D a \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, \mathrm{d}A}_{=a_{ji}} = \underbrace{\iint_D f \phi_j \, \mathrm{d}A,}_{=b_j} \quad j = 1, \dots, N.$$

Detta är på formen

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ji} U_i = b_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

dvs ett linjärt ekvationssystem för U_i. Vi skriver på matrisform:

$$\mathcal{A}\mathcal{U} = b,$$

med

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}$$

och *styvhetsmatrisen* (*stiffness matrix*)

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}, \quad a_{ji} = \iint_D a \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j \, \mathrm{d}A$$

och *lastvektorn* (*load vector*)

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad b_j = \iint_D f\phi_j \, \mathrm{d}S.$$

Matrisen $\mathcal{A}$ är *symmetrisk*: $A = A^T$ ($a_{ij} = a_{ji}$), *stor*: antalet noder N är stort (t ex $N = 10^3$ eller mer) och *gles* (*sparse*): de flesta matriselementen $a_{ij} = 0$. Vi har $a_{ij} \neq 0$ endast då motsvarande noder P_i och P_j är grannar.

PDE Toolbox

MATLAB-programmet PDE Toolbox ställer upp och löser ekvationssystemet $\mathcal{A}\mathcal{U} = b$.

Problem

Problem 1.1. (a) Skriv ned randvärdesproblemet för värmeledning i kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, med värmeledningskoefficienten 3, källtätheten 2 och omgivande temperaturen 10 på alla sidor. På sidan $y = 0$ har vi värmeöverföringskoefficienten 7 medan övriga sidor har oändligt stor värmeöverföringskoefficient. Inga värmekällor på randen.

(b) Skriv end den svaga formen av detta randvärdesproblem.

Problem 1.2. Samma som i Problem 1.1 men med värmeledningskoefficienten $1 + xy$, inga värmekällor, omgivande temperaturen 10 överallt, ytskiktets värmeöverföringskoefficient 0 för $x = 0$, och 7 för $x = 1$, och oändligheten för $y = 0$ och $y = 1$.

Problem 1.3. (a) Skriv ned finita elementbasfunktionerna ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 för ett nät som består av en enda triangel T med hörnen $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (0, 1)$.

(b) Beräkna motsvarande styvhetsmatris $a_{ij} = \iint_T \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Problem 1.4. Skriv ned den svaga formuleringen av

(a)

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) + cu = f & \text{i } V, \\ u = u_\mathrm{A} & \text{på } S. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{i } V, \\ u = u_\mathrm{A} & \text{på } S_1, \\ \mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u = g & \text{på } S_2, \end{cases}$$

där $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$ och $S = S_1 \cup S_2$ (ej överlappande).

Svar och lösningar.

1.1. (a) På sidan $y=0$ har vi $g=0$ och den utåtriktade normalvektorn $\hat{\mathbf{N}}=-\mathbf{j}$ så att randvillkoret blir

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u+k(u-u_{\mathrm{A}})=3(-\mathbf{j})\cdot\nabla u(x,0)+7(u(x,0)-10)=-3\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}+7(u(x,0)-10)=0.$$

Randvärdesproblemet är

$$\begin{cases} -3\Delta u(x,y)=2 \quad \text{för } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\\ u(x,1)=u(0,y)=u(1,y)=10,\\ -3\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y}+7(u(x,0)-10)=0, \end{cases}$$

där $\Delta u=\nabla\cdot\nabla u$.

(b) Finn $u=u(x,y)$ sådan att $u(x,1)=u(0,y)=u(1,y)=10$ och

$$3\int_0^1\int_0^1 \nabla u(x,y)\cdot\nabla v(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+7\int_0^1 u(x,0)v(x,0)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1\int_0^1 v(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+70\int_0^1 v(x,0)\,\mathrm{d}x$$

för alla testfunktioner $v=v(x,y)$ med $v(x,1)=v(0,y)=v(1,y)=0$.

1.2. (a) På sidan $x=0$ har vi $a=1+xy=1$, $g=0$, $k=0$ och den utåtriktade normalvektorn $\hat{\mathbf{N}}=-\mathbf{i}$ så att randvillkoret blir

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u+k(u-u_{\mathrm{A}})=(-\mathbf{i})\cdot\nabla u(0,y)=-\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0.$$

På sidan $x=1$ har vi $a=1+xy=1+y$, $g=0$, $k=7$ och den utåtriktade normalvektorn $\hat{\mathbf{N}}=\mathbf{i}$ så att randvillkoret blir

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u+k(u-u_{\mathrm{A}})=(1+y)\mathbf{i}\cdot\nabla u(1,y)+7(u(1,y)-10)=(1+y)\frac{\partial u(1,y)}{\partial x}+7(u(1,y)-10)=0.$$

Randvärdesproblemet är

$$\begin{cases} -\nabla\cdot((1+xy)\nabla u(x,y))=0 \quad \text{för } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\\ u(x,0)=u(x,1)=10,\\ \dfrac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\\ (1+y)\dfrac{\partial u(1,y)}{\partial x}+7(u(1,y)-10)=0. \end{cases}$$

(b) Finn $u=u(x,y)$ sådan att $u(x,0)=u(x,1)=10$ och

$$\int_0^1\int_0^1 (1+xy)\nabla u(x,y)\cdot\nabla v(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+7\int_0^1 u(1,y)v(1,y)\,\mathrm{d}y=70\int_0^1 v(1,y)\,\mathrm{d}y$$

för alla testfunktioner $v=v(x,y)$ med $v(x,0)=v(x,1)=0$.

1.3. (a) Basfunktionerna är av formen $\phi(x,y)=a+bx+cy$ och lika med 1 en av noderna och 0 i de övriga. Vi får

$$\phi_1(x,y)=1-x-y,\ \phi_2(x,y)=x,\ \phi_3(x,y)=y.$$

(b)

$$\nabla\phi_1(x,y) = -\mathbf{i} - \mathbf{j},\ \nabla\phi_2(x,y) = \mathbf{i},\ \nabla\phi_3(x,y) = \mathbf{j}.$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \iint_T \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_T 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{area}(T) = 1, \\ a_{12} &= \iint_T \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_T (-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\,\mathrm{area}(T) = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

och så vidare.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1.4. (a) Finn $u = u(x,y,z)$ med $u = u_\mathrm{A}$ på S och

$$\iiint_D (a\nabla u \cdot \nabla v + cuv)\,\mathrm{d}V = \iiint_D fv\,\mathrm{d}V$$

för alla testfunktioner $v = v(x,y,z)$ med $v = 0$ på S.

(b) Finn $u = u(x,y,z)$ med $u = u_\mathrm{A}$ på S_1 och

$$\iiint_D \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}V = \iint_{S_2} gv\,\mathrm{d}S$$

för alla testfunktioner $v = v(x,y,z)$ med $v = 0$ på S_1.