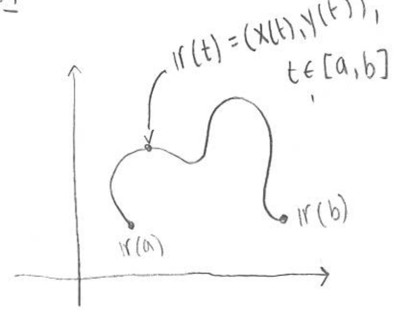
RÖ1. VEKTORFUNKTIONER, KURVOR

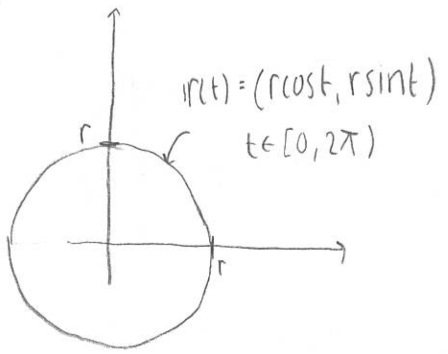
En kurva i tre dimensioner kan skrivas på formen

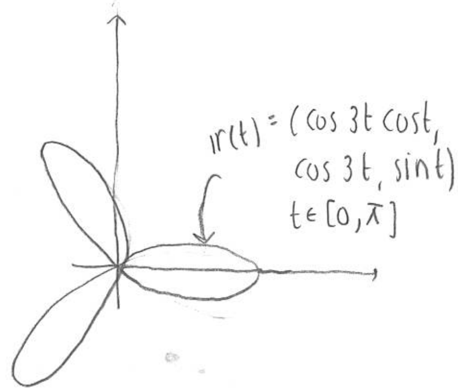
$$\mathbb{r} = \mathbb{r}(t) = x(t)\,\mathbb{i} + y(t)\,\mathbb{j} + z(t)\,\mathbb{k} = (x(t), y(t), z(t)) \quad , \quad t \in [a,b]$$

Den är <u>parametriserad</u> med t som parameter. (beror bara på en variabel t)

<u>Exempel</u>:







<u>Vad ska vi göra med kurvor</u>?

- Kan beskriva en bana som en partikel rör sig längs, då beskriver $\mathbb{r}(t)$ partikelns position vid tiden t och vi kan räkna ut hastighet $\mathbb{v}(t) = \dfrac{d\mathbb{r}}{dt}$, acceleration $\mathbb{a}(t) = \dfrac{d^2\mathbb{r}}{dt^2}$ m.m
- beräkna längd, m.m

11.1.17. En punkt P rör sig längs skärningen mellan $z = x^2$ och $x + y = 2$. i riktning av ökande y med konstant fart $v = 3$. Vilken hastighet har P då den är i $(1,1,1)$?

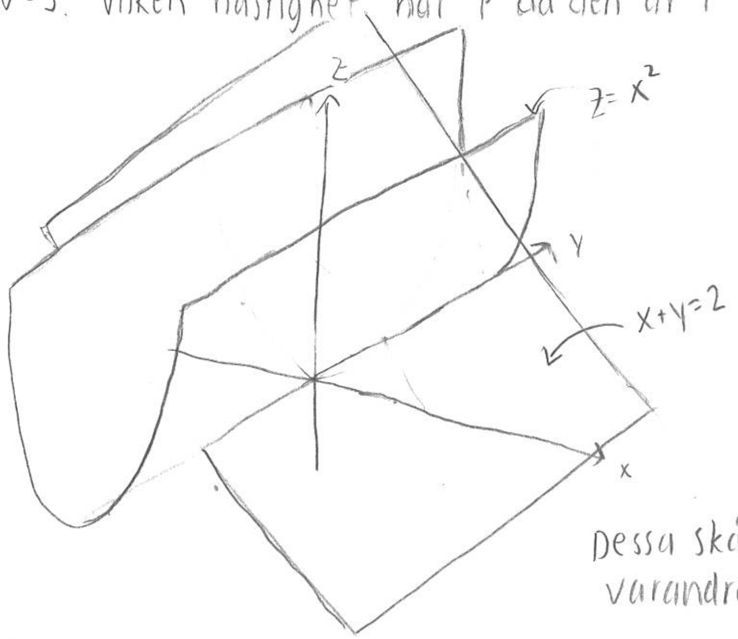
1. Hitta P:s position ; $\mathbb{r}(t)$

$\mathbb{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

eftersom $y(t) = 2 - x(t)$ och $z(t) = x(t)^2$

får vi

$\mathbb{r}(t) = (x(t), 2 - x(t), x(t)^2)$



Dessa skär varandra i en linje som P rör sig på.

2. Hitta P:s hastighet

$$\mathbb{v}(t) = \frac{d\mathbb{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, -\frac{dx}{dt}, 2x(t)\frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \frac{dx}{dt}(1, -1, 2x(t))$$

Vi vet att P har konstant <u>fart</u> $v = \|\mathbf{v}\| = 3$, så vi måste ha

$$v = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \left(1^2 + (-1)^2 + (2x)^2\right)} = \left|\frac{dx}{dt}\right| \sqrt{2+4x^2} = 3$$

$$\Rightarrow \left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{3}{\sqrt{2+4x^2}}$$, men vi vet inte om $\frac{dx}{dt}$ är positivt eller negativt.

Eftersom P rör sig i riktning av ökande y måste hastigheten i y-led vara positiv.

Hastigheten i y-led är $-\frac{dx}{dt}$, så vi får $-\frac{dx}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} < 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{-3}{\sqrt{2+4x^2}}$

$$\Rightarrow \mathbf{v}(t) = \frac{-3}{\sqrt{2+4x^2}}(1, -1, 2x(t))$$

3. Vi vill hitta $\mathbf{v}$ i punkten $(1,1,1)$. Eftersom $\mathbf{r}(t) = (x(t), 2-x(t), x(t)^2)$ måste vi då ha $x=1 \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{-3}{\sqrt{2+4}}(1,-1,2) = \frac{3}{\sqrt{6}}(-1,1,-2) = \sqrt{\frac{3}{2}}(-1,1,-2)$.

<u>Svar</u>: $\mathbf{v} = \sqrt{\frac{3}{2}}(-1,1,-2)$

11.1.26. Vad kan man säga om en partikels rörelse då dess position och hastighet uppfyller $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} > 0$ resp. $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} < 0$?

Notera att $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\mathbf{r}\|^2) = \{\|\mathbf{r}\| = r = \text{avst. från origo}, r \geq 0\}$

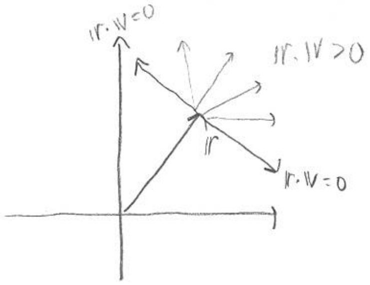
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r(t)^2) = r(t)\frac{dr}{dt} = r(t)v(t)$$

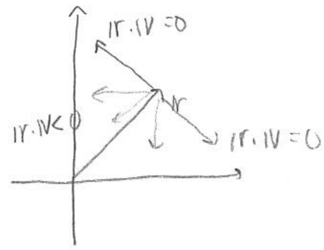
$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{r}_{\geq 0}\frac{dr}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} > 0$, partikeln på väg från origo (avst. ökar)

$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} < 0 \Leftrightarrow \underbrace{r}_{\geq 0}\frac{dr}{dt} < 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} < 0$, partikeln på väg mot origo (avst. minskar)

Vi kan också se att $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{r}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta > 0$ om $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$

< 0 om $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$





11.3.13. Beräkna längden av kurvan $\mathbf{r}(t) = t^2\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}} + t^3\hat{\mathbf{k}}$, $t \in [0,1]$.

Längden av en kurva $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a,b]$, ges av

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

Vi har $\mathbf{r}'(t) = 2t\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}} + 3t^2\hat{\mathbf{k}}$ och $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(2t)^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2}$

$$= \sqrt{8t^2 + 9t^4} = \sqrt{t^2(8+9t^2)} = |t|\sqrt{8+9t^2} = \{t \in [0,1]\} = t\sqrt{8+9t^2},$$

så $L = \int_0^1 t\sqrt{8+9t^2}\,dt = \{t^2 = x,\ dx = 2t\,dt,\ x \in [0,1]\} = \int_0^1 \sqrt{8+9t^2}\,\frac{1}{2}\underbrace{2t\,dt}_{dx}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{8+9x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\left[(8+9x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{27}\left(17\sqrt{17} - 8\sqrt{8}\right) = \frac{1}{27}\left(17\sqrt{17} - 16\sqrt{2}\right)$$

l.e.