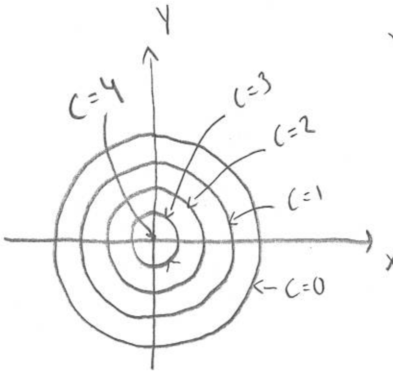
# RÖ2 NIVÅKURVOR, GRÄNSVÄRDEN, PARTIELLA DERIVATOR

## Nivåkurvor

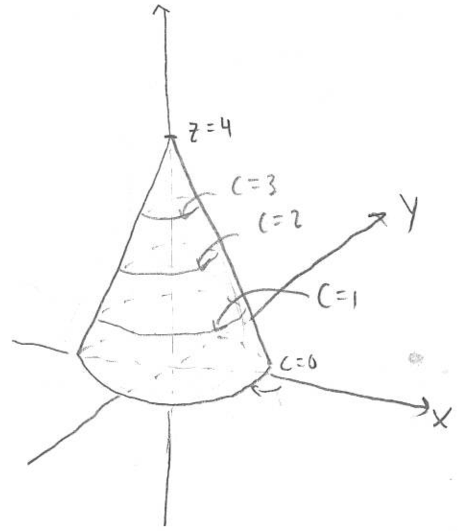
En nivåkurva till en funktion $z = f(x,y)$ är en kurva där funktionen har samma värde, dvs

$$f(x,y) = C$$

Exempel:




vad är detta?




12.1.23. Skissa några nivåkurvor till $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$.

kurvorna uppfyller $f(x,y) = C$, $\dfrac{x-y}{x+y} = C \iff (x-y) = C(x+y)$

$$\iff y(C+1) = x(1-C) \overset{C \neq -1}{\iff} y = \left(\frac{1-C}{1+C}\right)x$$ en linjär funktion av $x$!

vi testar några olika värden på $C$.

$C=-3$ : $y = -2x$

$C=-2$ : $y = -3x$

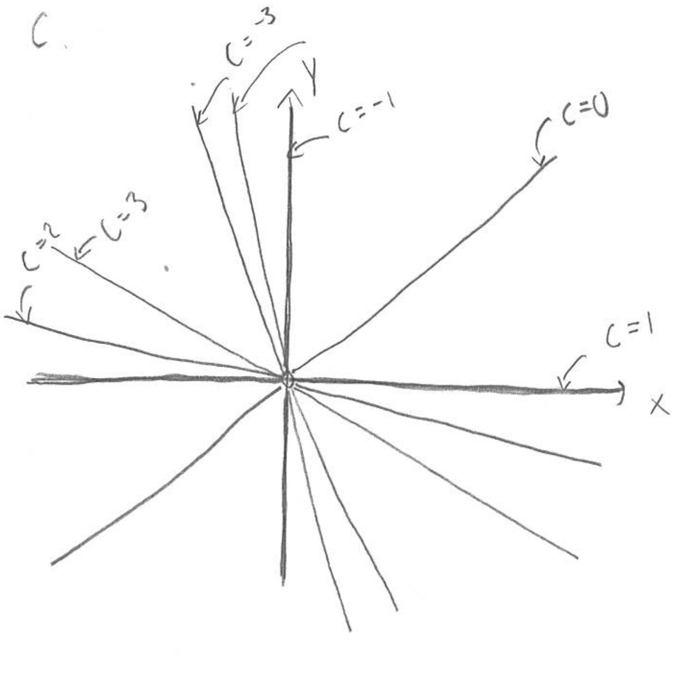
$C=-1$ : $x = 0$

$C=0$ : $y = x$

$C=1$ : $y = 0$

$C=2$ : $y = -1/3\, x$

$C=3$ : $y = -1/2\, x$

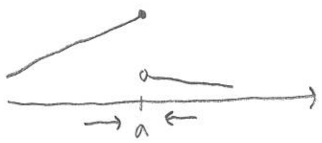


# Gränsvärden i 2D

En funktion $f(x,y)$ har gränsvärdet $L$ i punkten $(a,b)$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, om

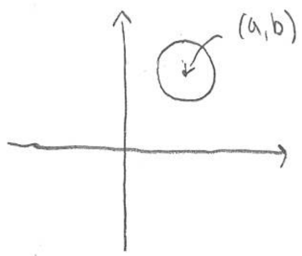
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ 0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon .$$

I 1D:




Måste bli samma från höger och vänster om ska ha gränsvärde i a.

I 2D:




Måste bli samma från alla håll om ska ha gränsvärde i (a,b).

## Metod för att hitta gränsvärde /visa att det inte existerar

1. Kolla vad gränsvärdet blir längs några typiska riktningar, om det blir olika kan det inte existera. Några typiska riktningar kan vara $x=0$, $y=0$, $y=x$, $y=x^2$,
2. Om det blir lika längs några olika riktningar och man tror att det existerar, visa det genom att kolla på

$$|f(x,y) - L|$$

och visa att det är mindre än något som går mot noll, då måste även

$$|f(x,y) - L| \to 0$$

12.29. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ eller visa att det inte existerar.

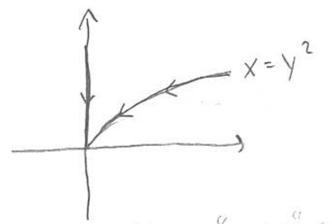
Kolla längs några olika riktningar


$x=0$: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(0 \cdot y)}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \to 0} 0 = 0$

$y=x$: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2)}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Olika längs olika riktningar $\implies$ gränsvärdet existerar

12.2.11. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ eller visa att det inte existerar.




$\underline{x=0}$: $\lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y^2}{0+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

$\underline{x=y^2}$: $\lim_{y\to 0} \frac{y^4\cdot y^2}{y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{2y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{2} = 0$ samma, vi anar att gränsvärdet kanske existerar så vi försöker visa det.

$|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}\right| \leq \{x^2 \leq x^2+y^4\} \leq \left|\frac{(\cancel{x^2+y^4})y^2}{\cancel{x^2+y^4}}\right| = y^2 \to 0, \ (x,y)\to(0,0)$

Vi har visat att avståndet mellan vår funktion och 0 blir mindre än något som går mot noll => gränsvärdet är 0.

Partiella derivator

En partiell derivata till en funktion $f(x,y)$ är dess derivata m.a.p. en av dess variabler

$$f_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$ om dessa existerar

$$f_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

Deriverar man m.a.p. x ses y som en konstant.

12.3.11 Beräkna $f_1(0,0)$ med definitionen för derivata då

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3-y^3}{x^2+3y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cancel{h^3}}{\cancel{h^3}} = 2$$

12.3.25. Visa att $z = xe^y$ uppfyller $x\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \{y \text{ konstant}\} = e^y$

och $x\frac{\partial z}{\partial x} = x\cdot e^y = \frac{\partial z}{\partial y}$.

$\frac{\partial z}{\partial y} = \{x \text{ konstant}\} = xe^y$

12.4.17. Visa att $u(x,t) = t^{-1/2} e^{-x^2/4t}$ uppfyller $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{\text{produktregeln}\} = -\frac{1}{2} t^{-3/2} e^{-x^2/4t} + t^{-1/2} e^{-x^2/4t} \cdot (-x^2)\left(\frac{-1}{4}\right) t^{-2}$$

$$= \frac{1}{2} t^{-3/2} e^{-x^2/4t} \left(-1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{t}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = t^{-1/2} e^{-x^2/4t} \cdot \frac{-1}{4t} 2x = -\frac{1}{2} t^{-3/2} x e^{-x^2/4t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \{\text{produktregeln}\} = -\frac{1}{2} t^{-3/2} \left(e^{-x^2/4t} + x e^{-x^2/4t} \cdot \left(\frac{-2x}{4t}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} t^{-3/2} e^{-x^2/4t} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{t}\right) = \frac{1}{2} t^{-3/2} e^{-x^2/4t} \left(-1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$