RÖ4. GRADIENT, NEWTONS METOD, TAYLORS FORMEL

Gradient

Gradienten ∇f av en funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ är en vektor som uppfyller

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = (f_1, \dots, f_n)$$

I två och tre dimensioner $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ respektive $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

JN 1.3.b) Beräkna gradienten $\nabla f(\mathbf{x})$ då $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ och linjärisera f kring $\bar{\mathbf{x}} = (1,1,1)$.

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$$

Vi kommer ihåg linjäriseringen i 2 dimensioner runt en punkt (a,b)

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) \\ &= f(a,b) + (f_1(a,b), f_2(a,b)) \cdot (x-a, y-b) \\ &= f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

På samma sätt blir det i 3 och fler dimensioner om vi linjäriserar runt $\bar{\mathbf{x}}$

$$L(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

Med $(a,b,c) = (1,1,1)$ får vi

$$L(\mathbf{x}) = 3 + (2,2,2) \cdot (x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1) = 3 + 2(x_1 - 1) + 2(x_2 - 1) + 2(x_3 - 1)$$

$$= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3$$

Jacobimatris

Om f är en vektor av funktioner $f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$ får vi en gradient för varje funktion.

Dem kan vi sätta ihop till en s.k. jacobimatris

$$D_f = D_f(x_1,\dots,x_n) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_1,\dots,x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

<u>Newtons metod</u>

Kan användas för att lösa ekvationer på formen

$$f(\mathbb{x}) = \mathbb{0}, \quad \text{där}$$

$\mathbb{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$, $f = [f_1, \dots, f_n]^T$.

<u>I 1D</u>: Vill lösa $f(x) = 0$

Linjäriserar runt startgissn. a

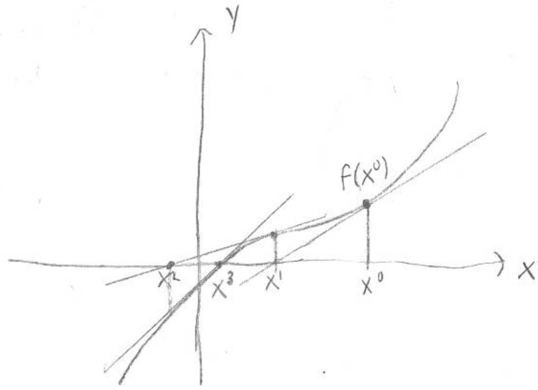
$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) = 0$$

Nytt x

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad \text{sätt } a = x$$

Metoden är

1. Välj en startgissning $\mathbb{a}$
2. Lös $L(\mathbb{a}+\mathbb{h}) = f(\mathbb{a}) + D_f(\mathbb{a})\mathbb{h} = \mathbb{0}$, där L är linjäriseringen av f runt $\mathbb{a}$. $\iff D_f(\mathbb{a})\mathbb{h} = -f(\mathbb{a})$ (ett linjärt ekvationssystem i $\mathbb{h}$)
3. uppdatera $\mathbb{a} = \mathbb{a} + \mathbb{h}$
4. gå till 1. om inte $\|\mathbb{h}\| < tol$



JN 1.6. a) skriv $(*)\begin{cases} u_2(1-u_1^2) = 0 & (1) \\ 2 - u_1u_2 = 0 & (2) \end{cases}$ på formen $f(\mathbb{u}) = \mathbb{0}$ och hitta alla

lösningar med handräkning.

Låt $\mathbb{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ $f = \begin{bmatrix} f_1(\mathbb{u}) \\ f_2(\mathbb{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2(1-u_1^2) \\ 2-u_1u_2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, då är $(*)$ $f(\mathbb{u}) = \mathbb{0}$.

lösningar till $(*)$ ska uppfylla båda ekvationerna

<u>Alt 1</u>: $u_2 = 0$ löser (1) men (2) blir $2 = 0 \Rightarrow$ <u>ej ok</u>

<u>Alt 2</u>: $u_1^2 = 1$ löser (1). <u>om $u_1 = 1$</u> måste $u_2 = 2$ för att (2) ska uppfyllas $\Rightarrow$ $(u_1, u_2) = (1, 2)$ är en lösn.

<u>om $u_1 = -1$</u> måste $u_2 = -2$ för att (2) ska uppfyllas $\Rightarrow$ $(-1, -2)$ en lösn.

b) Beräkna Jacobimatrisen $D_f(\mathbb{u})$

$$D_f(\mathbb{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u_1u_2 & 1-u_1^2 \\ -u_2 & -u_1 \end{bmatrix}$$

c) Gör en iteration med Newtons metod för att lösa $f(\mathbb{u}) = \mathbb{0}$, med startgissning $\mathbb{u}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. $\mathbb{u}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $L(\mathbb{u}^{(0)} + \mathbb{h}) = f(\mathbb{u}^{(0)}) + D_f(\mathbb{u}_0)\mathbb{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

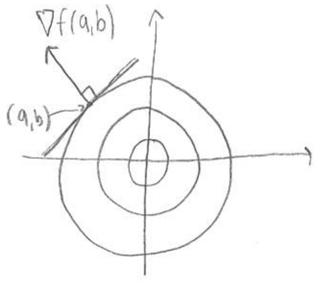
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Uppdatera $\mathbb{u}^{(1)} = \mathbb{u}^{(0)} + \mathbb{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vi fick en lösning direkt!

<u>Tangentlinje / tangentplan</u>

- Gradienten ∇f är normal (vinkelrät) mot nivåytorna till $f(x,y,z)$ och nivåkurvorna till $f(x,y)$

- Tangentlinjen till nivåkurvan till f genom (a,b) kan därför fås som



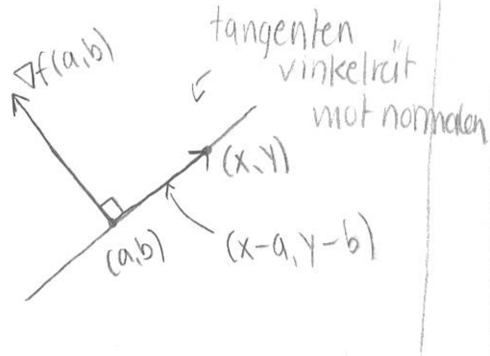
$$\nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b) = 0$$

Tangentytan till nivåytan till $f(x,y,z)$ i punkten (a,b,c) kan därför fås som

$$\nabla f(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0$$

Om vektorn $(x-a, y-b)$ ska vara vinkelrät mot gradienten ska

$$\nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b) = 0$$



12.7.3. Låt $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ och $(a,b)=(1,2)$.

a) Beräkna $\nabla f(a,b)$

b) en ekvation för tangentplanet till f som går genom (a,b).

c) en ekvation för tangentlinjen till nivåkurvan $f(x,y) = f(a,b) = C$

a) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\frac{x^2+y^2 - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right)$

$\nabla f(1,2) = \left(\frac{1+4-1 \cdot 2 \cdot 1}{25}, -\frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{25} \right) = \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25} \right)$

c) Tangentlinjen fås från

$\nabla f(1,2) \cdot (x-1, y-2) = 0 \iff \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25} \right) \cdot (x-1, y-2) = 0$

$\iff \frac{3}{25}x - \frac{4}{25}y - \frac{3}{25} + \frac{8}{25} = 0 \iff 3x - 4y + 5 = 0$

$\iff y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

b) vi vill hitta tangentplanet till $z = f(x,y) \iff f(x,y) - z = 0$, vilket är en nivåyta (med $c=0$) till funktionen $g(x,y,z) = f(x,y) - z = \frac{x}{x^2+y^2} - z$

Tangentplanet till en nivåyta hittar vi som

$\nabla g(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0$

I punkten $(1,2)$ är $z = f(1,2) = \frac{1}{5}$, så med $(a,b,c) = (1,2,\frac{1}{5})$ och

$\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, -1 \right)$ får vi

tangentplanet $\nabla g(1,2,\frac{1}{5})(x-1, y-2, z-\frac{1}{5}) = 0 \iff$

$$\left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}, -1\right)\cdot\left(x-1, y-2, z-\frac{1}{5}\right) = 0 \iff$$

$$\frac{3}{25}x - \frac{4}{25}y - z - \frac{3}{25} + \frac{8}{25} + \frac{1}{5} = 0 \iff$$

$$3x - 4y - 25z + 10 = 0$$

Taylors formel i 2D

Taylorpolynomet av grad 2 till en funktion $f(x,y)$ runt punkten (a,b) är

$$P_2(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right)$$

där $(x,y) = (a+h, b+k)$.

12.9.8 Beräkna Taylorpolynomet av grad 2 runt $(1,0)$ då $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

Vi behöver alla derivator i formeln ovan. $f(1,0) = \ln 1 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\left(\frac{x^2+y^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\left(\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{2x \cdot -2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0) = 0$$

$$\Rightarrow P_2(x,y) = 0 + 2h + 0 + \frac{1}{2}\cdot -2h^2 + \frac{1}{2}\cdot 2k^2 = \{x = 1+h, y = 0+k\}$$

$$= 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2$$