RÖ 5. EXTREMVÄRDEN

1D

En funktion $f(x)$ har max/min i punkten $\bar{x}$, då gäller ett av följande

- $f'(\bar{x}) = 0$, dvs $\bar{x}$ är en kritisk punkt till f.
- $\bar{x}$ är en singulär punkt, dvs f är ej deriverbar i $\bar{x}$.
- $\bar{x}$ är en randpunkt till f:s definitionsmängd.

2D

En funktion $f(x,y)$ har max/min i $(\bar{x},\bar{y})$, då gäller ett av följande

- $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$, $(\bar{x},\bar{y})$ kritisk punkt
- $(\bar{x},\bar{y})$ singulär punkt till f, dvs $\nabla f(\bar{x},\bar{y})$ existerar ej.
- $(\bar{x},\bar{y})$ är en randpunkt

Om f dessutom är kontinuerlig och definitionsmängden D_f är sluten och begränsad har f max och min i D_f.

Max eller min?

1D

Om $f'(\bar{x}) = 0$ och

- $f''(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \bar{x}$ lokalt min
- $f''(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \bar{x}$ lokalt max
- $f''(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x}$ sadelpunkt

2D

Om $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ och Hessianen H

- $H(\bar{x},\bar{y})$ positivt definit $\Rightarrow (\bar{x},\bar{y})$ lok. min
- $H(\bar{x},\bar{y})$ negativt definit $\Rightarrow (\bar{x},\bar{y})$ lok. max
- $H(\bar{x},\bar{y})$ indefinit $\Rightarrow (\bar{x},\bar{y})$ sadelpunkt,

där
$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{11}(x,y) & f_{12}(x,y) \\ f_{21}(x,y) & f_{22}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

13.1.19. Hitta max och min till $f(x,y) = xye^{-x^2-y^4}$.

∇f existerar överallt och det finns inga randpunkter $\Rightarrow$ max och min måste finnas i kritiska punkter. om det finns max och min.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{-x^2-y^4} + xy\cdot(-2x)e^{-x^2-y^4}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = e^{-x^2-y^4}\left[y(1-2x^2),\ x(1-4y^4)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-x^2-y^4} + xy(-4y^3)e^{-x^2-y^4}$$

$$\nabla f = (0,0) \Rightarrow \{e^{-x^2-y^4} > 0\} \Rightarrow \begin{cases} y(1-2x^2) = 0 & (1) \\ x(1-4y^4) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $y = 0$ eller $1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $x = 0$ eller $1-4y^4 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ kritiska punkter $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Funktionsvärdet i dessa punkter är:

$f(0,0) = 0$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$ ← potentiellt max

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$ ← potentiellt min.

Vi kollar Hessianen $H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2-y^4}y(1-2x^2)\right) = -2xye^{-x^2-y^4}(1-2x^2) + ye^{-x^2-y^4}\cdot(-4x)$$

$$= -2xye^{-x^2-y^4}(1-2x^2+2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x^2-y^4}x(1-4y^4)\right) = -4y^3xe^{-x^2-y^4}(1-4y^4) + xe^{-x^2-y^4}(-16y^3)$$

$$= -4xy^3e^{-x^2-y^4}(1-4y^4+4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x^2-y^4}y(1-2x^2)\right) = (1-2x^2)\left(e^{-x^2-y^4} - 4y^4e^{-x^2-y^4}\right)$$

$$= (1-2x^2)e^{-x^2-y^4}(1-4y^4)$$

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} -2e^{-3/4} & 0 \\ 0 & -4e^{-3/4} \end{bmatrix} = H\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Alla egenvärden till H $(-2e^{-3/4}, -4e^{-3/4})$ är negativa i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow$ H negativt definit $\Rightarrow$ lokala maxpunkter

$$H\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} 2e^{-3/4} & 0 \\ 0 & 4e^{-3/4} \end{bmatrix}$$

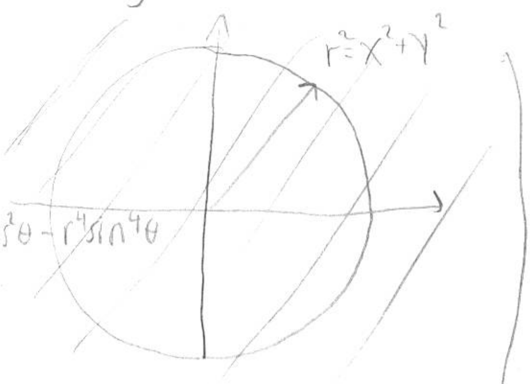
Alla egenvärden till H $(2e^{-3/4}, 4e^{-3/4})$ är positiva i $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow$ H positivt definit där $\Rightarrow$ lokala minpunkter.

Eftersom $f \to 0$ då $x^2+y^2 \to \infty$ är

$$\boxed{\begin{array}{l} f\text{:s maxvärde } \tfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}} \quad \left(\text{i } \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ f\text{:s minvärde } -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}} \quad \left(\text{i } \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{array}}$$

(Kolla vad som händer då $x^2+y^2 \to \infty$ om definitionsmängden är obegränsad i någon riktning. Funktionen kan gå mot något som är större/mindre än lokala max/min då man närmar sig ∞ i någon riktning)

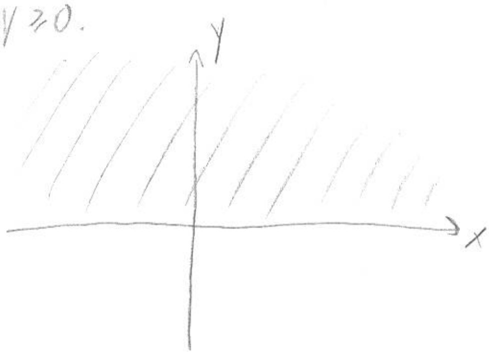


($f \to 0$ eftersom exponentialfunktionen går fortare mot noll än polynom.

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} f(x,y) = \{x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\} = \lim_{r \to \infty} r^2\cos\theta\sin\theta\, e^{-r^2\cos^2\theta - r^4\sin^4\theta}$$

$$= \lim_{r \to \infty} r^2 \underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\text{begr.}}\, e^{-r^2\underbrace{\cos^2\theta}_{\text{begr.}\geq 0}} \cdot e^{-r^4\underbrace{\sin^4\theta}_{\text{begr.}\geq 0}} = 0$$

13.2.10. Hitta max och min till $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$ för $y \geq 0$.



f är deriverbar överallt, så max och min finns antingen i kritiska punkter eller på randen. (nu har vi en rand $y=0$).

• Hitta kritiska punkter

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(1+x^2+y^2) - (x-y)\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2+2xy+1}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(1+x^2+y^2) - (x-y)\cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2-2xy-1}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+y^2+2xy+1 = 0 & (1) \\ -x^2+y^2-2xy-1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lös ut $2xy$ ur (1) och sätt in i (2) $\Rightarrow$

$$-x^2+y^2-(x^2-y^2-1)-1 = 0 \Leftrightarrow -2x^2+2y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2-y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0 \Rightarrow \underline{x=y} \text{ eller } \underline{x=-y}$$

$\underline{x=y}$: sätt in i (1) $-y^2+y^2+2y^2+1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}$ (ej reell lösn.)

$\underline{x=-y}$: sätt in i (1) $-y^2+y^2-2y^2+1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ kritiska punkter $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ej ok pga } y<0!\right)$

Kolla funktionsvärdet

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

• Kolla randen

På den enda randen är $y=0$, dvs

$$f(x,0) = \frac{x}{1+x^2} = g(x)$$

Finns några kritiska punkter här?

$$g'(x) = \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \text{ om } x = \pm 1, \text{ dvs}$$

$(1,0)$ och $(-1,0)$ är kandidater till max och min.

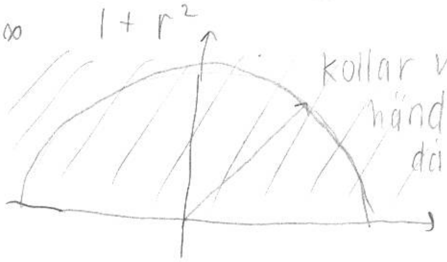
Kolla funktionsvärdet

$$f(1,0) = \frac{1}{2}, \quad f(-1,0) = -\frac{1}{2}$$

Vi ser också att $f \to 0$ då $x^2+y^2 \to \infty$

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x-y}{1+x^2+y^2} = \{x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\} = \lim_{r\to\infty} \frac{r(\cos\theta - \sin\theta)}{1+r^2}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{\overbrace{\cos\theta - \sin\theta}^{\text{begränsat}}}{\underbrace{1/r + r}_{\to\infty}} = 0$$



Alltså är f:s största värde $f(1,0) = \frac{1}{2}$ och f:s minsta värde

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$