RÖ 6 LAGRANGES MULTIPLIKATORMETOD

Metod för att hitta extremvärden till problem på formen (2D)

$$\max/\min \ \underbrace{f(x,y)}_{\text{målfunktion}}$$

$$\text{så att} \quad \underbrace{g(x,y)=0}_{\text{bivillkor}}$$

Om max/min $(\bar{x},\bar{y})$ finns uppfyller det

$$\nabla L(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) = (0,0,0), \text{ där}$$

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

Så genom att hitta kritiska punkter till L hittar vi max/min-kandidater till f.

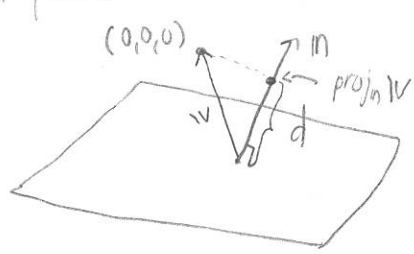
13.3.3. Hitta avståndet från origo till planet $x+2y+2z=3$

a) geometriskt

b) genom att skriva om problemet som ett problem i två variabler utan bivillkor.

c) med Lagranges multiplikatormetod.

a) Närmsta avståndet får vi genom projektion av origo på planets normalvektor.



$\mathbb{n} = (1,2,2)$ (a,b,c i $ax+by+cz=d$)

$\hat{\mathbb{n}} = \frac{1}{3}(1,2,2)$

En punkt i planet är $(3,0,0) = \mathbb{p}$.

Hitta vektorn $\mathbb{v}$ från $\mathbb{p}$ till origo, $\mathbb{v} = \mathbb{0} - \mathbb{p} = (-3,0,0)$

Projektionen av $\mathbb{v}$ på normalvektorn är

$$\text{proj}_{\hat{\mathbb{n}}} \mathbb{v} = (\mathbb{v}\cdot\hat{\mathbb{n}})\hat{\mathbb{n}} = (-3,0,0)\cdot\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}(1,2,2)$$

Kortaste avståndet är längden av projektionen

$$d = \| proj_{\hat{n}} v \| = \| -\frac{1}{3}(1,2,2) \| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2+2^2+2^2} = \frac{1}{3}$$

b) Vi eliminerar en variabel genom att lösa ut den ur planets ekvation
Ur $x+2y+2z=3$ får vi $x = 3-2y-2z$.

En punkt (godtycklig) i planet kan då skrivas $(x,y,z) = (3-2y-2z, y, z)$
och kortaste avståndet får vi genom att minimera avståndet till origo,

dvs $\min \| (3-2y-2z, y, z) - (0,0,0) \| = \min \sqrt{(3-2y-2z)^2+y^2+z^2}$

vi beräknar istället (x,y,z) från $\min (3-2y-2z)^2+y^2+z^2$

(vi får samma punkt om vi minimerar kvadraten på uttrycket, men lättare uttryck)

Hitta min genom att sätta gradienten till 0.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}\left((3-2y-2z)^2+y^2+z^2\right) = 2(3-2y-2z)\cdot(-2)+2y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\left((3-2y-2z)^2+y^2+z^2\right) = 2(3-2y-2z)\cdot(-2)+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 10y+8z=12 \\ 8y+10z=12 \end{cases} \Rightarrow y=z=\frac{2}{3}, \quad x = 3-2y-2z = 3-\frac{4}{3}-\frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{minsta avståndet } d = \sqrt{(3-2y-2z)^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{3}\sqrt{1^2+2^2+2^2} = \frac{1}{3}$$

c) Vi vill hitta den punkt (x,y,z) som är närmast origo, och (x,y,z) måste ligga i planet, dvs $x+2y+2z=3$. Vi får

$$\min \|(x,y,z)-(0,0,0)\| \quad = \quad \min \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\text{s.a. } x+2y+2z=3 \qquad\qquad \text{s.a. } x+2y+2z-3=0$$

Istället löser vi

$$\min x^2+y^2+z^2 \quad = \quad \min f(x,y,z)$$
$$\text{s.a. } x+2y+2z-3=0 \qquad \text{s.a. } g(x,y,z)=0$$

Låt $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x+2y+2z-3)$

$\nabla L = (0,0,0,0)$ ger

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 & \Rightarrow \lambda = -2x \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda = 0 & \Rightarrow 2y - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{y}{2} \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2z + 2\lambda = 0 & \Rightarrow 2z - 4x = 0 \Rightarrow 2z - 2y = 0 \Rightarrow y = z \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y + 2z - 3 = 0 & \Rightarrow x + 2y + 2z - 3 = 0 \Rightarrow \frac{y}{2} + 2y + 2z = 3 \Rightarrow \end{cases}$$

obs! $g(x,y,z) = 0$ i extrempunkterna till L som det ska!

$\Rightarrow \frac{y}{2} + 2y + 2y = 3 \Rightarrow 9y = 6 \Rightarrow y = \frac{2}{3}, \ z = \frac{2}{3}, \ x = \frac{1}{3}$

minsta avståndet $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{3}\sqrt{2^2+2^2+1^2} = 1$

13.3.5. Använd Lagranges metod för att hitta största och minsta avståndet från punkten $(2,1,-2)$ till sfären $x^2+y^2+z^2=1$.

En godtycklig punkt på sfären är (x,y,z) med $x^2+y^2+z^2=1$.

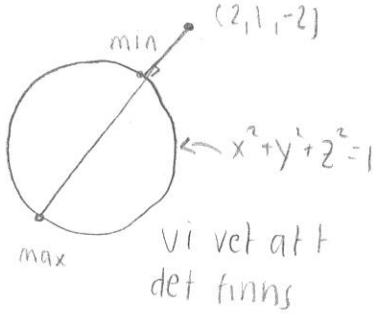
Vi vill minimera/maximera avståndet från en punkt på sfären till $(2,1,-2)$,

$$\min/\max \ \|(x,y,z)-(2,1,-2)\| = \min/\max \ \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2} \quad (*)$$
$$\text{s.a.} \ x^2+y^2+z^2=1 \qquad \text{s.a.} \ x^2+y^2+z^2-1=0$$

Vi får samma (x,y,z) om vi minimerar/maximerar kvadraten på avståndet, dvs

$$\min/\max \ (x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 = \min/\max \ f(x,y,z)$$
$$\text{s.a.} \ x^2+y^2+z^2-1=0 \qquad \text{s.a.} \ g(x,y,z)=0,$$

men får sätta in i ursprungliga funktionen $(*)$



vi vet att det finns max och min

Nu vill vi lösa $\nabla L = (0,0,0,0)$, där $L = f + \lambda g$ $\Longrightarrow$ byt sida

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-2) + 2\lambda x = 0 \iff 2x(1+\lambda) = 4 & (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-1) + 2\lambda y = 0 \iff 2y(1+\lambda) = 2 & (2) \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2(z+2) + 2\lambda z = 0 \iff 2z(1+\lambda) = -4 & (3) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 & (4) \end{cases}$$

obs! $g(x,y,z)=0$ i extrempunkterna till L, som det ska!

(1) ger $1+\lambda = \frac{2}{x}$ (x kan ej vara 0 för då stämmer inte (1))

sätt in i (2), (3): $y \cdot \frac{2}{x} = 1 \Rightarrow y = \frac{x}{2}$

$z \cdot \frac{2}{x} = -2 \Rightarrow z = -x$

sätt in i (4): $x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (-x)^2 - 1 = 0 \iff \frac{9x^2}{4} = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}$

$\underline{x = \frac{2}{3}}$ ger $y = \frac{1}{3}$, $z = -\frac{2}{3}$ och $d = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2} = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{16+4+16} = 2$

$\underline{x = -\frac{2}{3}}$ ger $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{2}{3}$ och $d = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2}$

$= \sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{64+16+64}$

$= 4$

Vi ser att största avståndet är 4 och minsta avståndet är 2.