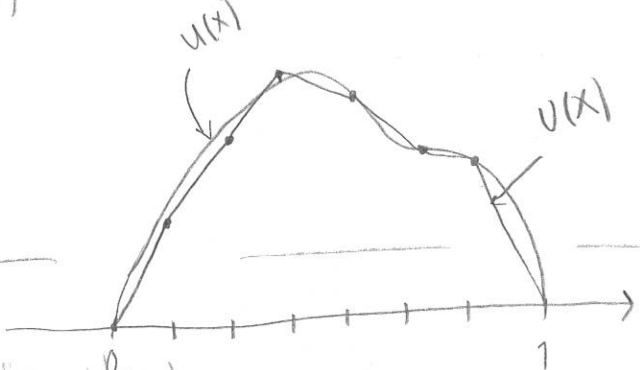
RÖ7. SVAG FORMULERING OCH FEM

Finita Elementmetoden (FEM)

Metod för att hitta approximativa lösningar till differentialekvationer (kan vara svårt/omöjligt att lösa exakt)

T.ex. $\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$



Metod

1. Skriv problemet på svag form (ska vi göra idag)
2. Partitionera intervallet
3. Välj typ av funktion man vill approximera lösningen $u(x)$ med på varje intervall (partition), t.ex. styckvis linjära polynom.
4. Välj typ av testfunktion, ofta samma som i 3. (Till svaga formuleringen)
5. Lös ekvationssystem för att hitta approximativ lösning $U(x)$.

Svag form

1. Multiplicera differentialekvationen med en s.k. testfunktion $v(x)$ som är noll där randvillkoren är u = konstant.

   I exemplet $-u''(x)v(x) = f(x)v(x), \; \forall \, v(x)$ med $v(0) = v(1) = 0$

2. Integrera partiellt över intervallet för att få bort derivator

   I exemplet $\int_0^1 -u''(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$ {p.i}

   $-\left([u'(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx \right) = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$ $\{v(0)=v(1)=0\}$

   $\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$

   I allmänhet vill man integrera tills man har så låg högstaderivata som möjl.

3. Formulera den svaga formen. $\Rightarrow$

I exemplet: Hitta $u(x)$ med $u(0)=u(1)=0$ s.a.

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \quad , \forall\ v(x) \text{ med } v(0)=v(1)=0.$$

Uppgifter ur fem1

3. Bestäm svaga formulering av

$$\begin{cases} D^2(EI\,D^2 w(x)) = q(x), & x \in (0,L) \\ w(0) = w(L) = 0 \\ D^2 w(0) = D^2 w(L) = 0 \end{cases}$$

D är här $\frac{d}{dx}$ så vi kan skriva problemet som $\begin{cases} (EI\,w''(x))'' = q(x) \\ w(0)=w(L)=0 \\ w''(0)=w''(L)=0 \end{cases}$

Multiplicera med en testfunktion $v(x)$, där $v(0)=v(L)=0$ och integrera

$$\int_0^L (EI\,w''(x))''\,v(x)\,dx = \int_0^L q(x)v(x)\,dx \quad \{p.i\}$$

$$\Big[(EI\,w''(x))'\,v(x)\Big]_0^L - \int_0^L (EI\,w''(x))'\,v'(x)\,dx = \int_0^L q(x)v(x)\,dx \quad \{v(0)=v(L)=0\}$$

$$-\int_0^L (EI\,w''(x))'\,v'(x)\,dx = \int_0^L q(x)v(x)\,dx \quad \{p.i\}$$

$$-\Big[EI\,w''(x)v'(x)\Big]_0^L + \int_0^L EI\,w''(x)v''(x)\,dx = \int_0^L q(x)v(x)\,dx \quad \{w''(0)=w''(L)=0\}$$

$$\int_0^L EI\,w''(x)\,v''(x)\,dx = \int_0^L q(x)v(x)\,dx$$

Formulera den svaga formen (man måste alltid nämna de randvillkor där funktionen är konstant)

Hitta $W(x)$ sådan att $W(0) = W(L) = 0$ och

$$\int_0^L EI\, W'' v''\, dx = \int_0^L q v\, dx$$

för alla $v(x)$ med $v(0) = v(L) = 0$.

8. Lös genom upprepad integration $\begin{cases} -au'' + u' = 1, & x \in (0,1),\ a > 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

Integrera en gång $\Rightarrow$ $\int -au''(x) + u'(x)\, dx = \int 1\, dx$ $\Leftrightarrow$

$-au'(x) + u(x) = x + C_0$ $\Leftrightarrow$ $u'(x) - \frac{1}{a} u(x) = -\frac{x}{a} + C_1$ $\Leftrightarrow$

{På formen $y'(x) + g(x)y(x) = f(x)$ $\Rightarrow$ integrerande faktor}

$u'(x) e^{-\frac{1}{a}x} - \frac{1}{a} u(x) e^{-\frac{1}{a}x} = -\frac{x}{a} e^{-\frac{1}{a}x} + C_1 e^{-\frac{1}{a}x}$ $\Leftrightarrow$

$\frac{d}{dx}\left(u(x) e^{-\frac{1}{a}x}\right) = -\frac{x}{a} e^{-\frac{1}{a}x} + C_1 e^{-\frac{1}{a}x}$ $\Rightarrow$ {integrera}

$$u(x) e^{-\frac{1}{a}x} = \int -\frac{x}{a} e^{-\frac{1}{a}x} + C_1 e^{-\frac{1}{a}x}\, dx = -\frac{1}{a}\left(-axe^{-\frac{1}{a}x} - \int -ae^{-\frac{1}{a}x} dx\right) - C_1 a e^{-\frac{1}{a}x} + C_2$$

$$= xe^{-\frac{1}{a}x} + ae^{-\frac{1}{a}x} - C_1 a e^{-\frac{1}{a}x} + C_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$u(x) = x + a - C_1 a + C_2 e^{\frac{1}{a}x}$$

Bestäm konstanterna genom att använda randvillkoren $\Rightarrow$

$u(0) = a(1-C_1) + C_2 = 0 \quad (1)$

$u(1) = 1 + a(1-C_1) + C_2 e^{\frac{1}{a}} = 0 \quad (2)$

(1) ger $a(1-C_1) = -C_2$

Sätt in i (2) $\Rightarrow 1 - C_2 + C_2 e^{\frac{1}{a}} = 0 \Leftrightarrow C_2(e^{\frac{1}{a}} - 1) = -1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{1 - e^{1/a}}$

$\Rightarrow C_1 = 1 + \frac{C_2}{a} = 1 + \frac{1}{a(1-e^{1/a})}$

$u(x) = x + a(1-C_1) + C_2 e^{\frac{1}{a}x} = x - \frac{1}{1-e^{1/a}} + \frac{e^{\frac{1}{a}x}}{1-e^{1/a}} = \frac{x - xe^{1/a} - 1 + e^{\frac{1}{a}x}}{1-e^{1/a}}$