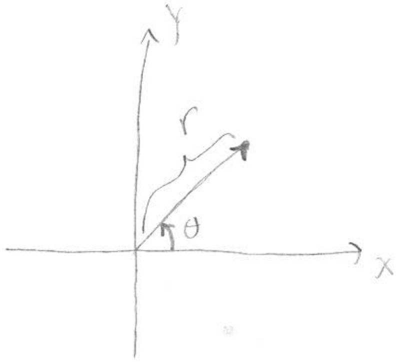
RÖ9 POLÄRA KOORDINATER OCH TRIPPELINTEGRALER

Polära koordinater i dubbelintegraler (variabelbyte)

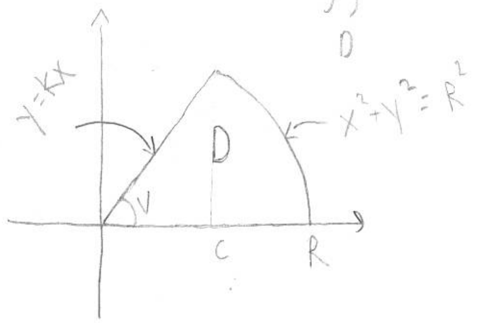
Integrationsområdet cirkulärt / integranden innehåller x^2+y^2 $\Rightarrow$ ofta lämpligt att göra ett variabelbyte

obs! glöm ej r!

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{och} \quad dx\,dy = \underline{\underline{r}}\,dr\,d\theta$$



Ex. Vad är $\iint_D dx\,dy$? (Arean av D)



"Vanliga" xy-variabler: Vi väljer x ytterst i integralen, x går från 0 till R

För ett visst x, vad går då y mellan?

$x < c \Rightarrow y \in [0, kx]$

$x \geq c \Rightarrow y \in [0, \sqrt{R^2-x^2}]$

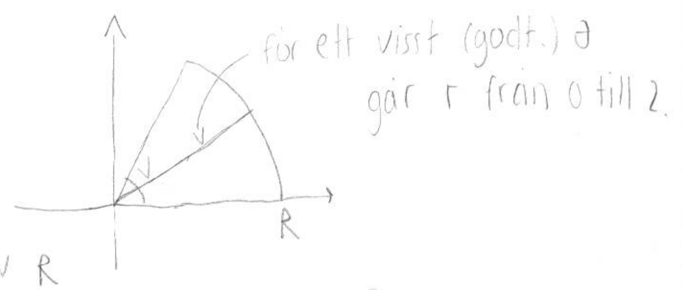
$$\Rightarrow \iint_D dx\,dy = \int_{x=0}^{c}\int_{y=0}^{kx} dx\,dy + \int_{x=c}^{R}\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx\,dy$$

vi måste hitta c och k och lösa båda dessa integraler...

Polära koordinater (r,θ): Vi väljer θ ytterst i integralen, θ går från 0 till v.

För ett visst θ, vad går r mellan?

$0 \leq \theta \leq v \Rightarrow r \in [0, R] \Rightarrow$



$$\iint_{D(x,y)} dx\,dy = \{dx\,dy = r\,dr\,d\theta\} = \iint_{D(r,\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{v}\int_{r=0}^{R} r\,dr\,d\theta = v\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \frac{v}{2}R^2$$

Mycket enklare!

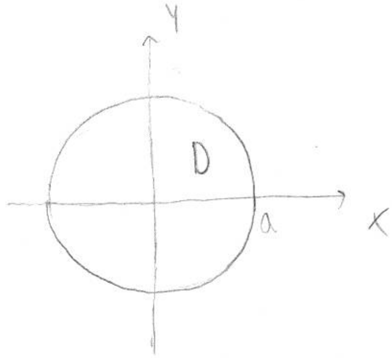
var kommer r från i $dxdy = rdrd\theta$?

llmänt om $\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases}$ så är $dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$

Vi har $\begin{cases} x = r\cos\theta = f(r,\theta) \\ y = r\sin\theta = g(r,\theta) \end{cases} \Rightarrow dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{vmatrix} drd\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} drd\theta$

$= (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)drd\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,drd\theta = rdrd\theta$

4.4.3. Beräkna $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, där $D = \{x,y : x^2+y^2 \le a,\ a>0\}$



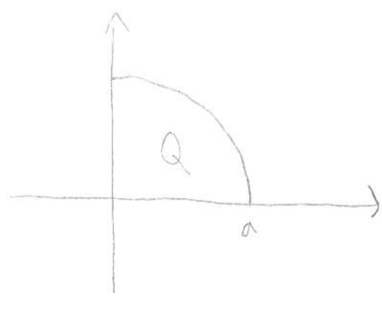
D är cirkulärt $\Rightarrow$ polära koordinater

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} \frac{1}{r}\cdot r\,drd\theta =$$

ett varv

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} [r]_0^a\,d\theta = a[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi a$$

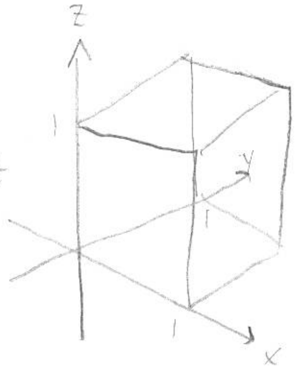
14.4.9 Beräkna $\iint_Q e^{x^2+y^2}\,dA$ där $Q = \{x,y : x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2 \le a^2,\ a>0\}$



$$\iint_Q e^{x^2+y^2}\,dA = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a} e^{r^2}\cdot r\,drd\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a} 2re^{r^2}\,drd\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi/2} [e^{r^2}]_0^a\,d\theta = \frac{1}{2}(e^{a^2}-1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(e^{a^2}-1)$$

14.5.5. Beräkna $\iiint_R x^2 + y^2 \, dV$, där $R = \{x, y, z : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$



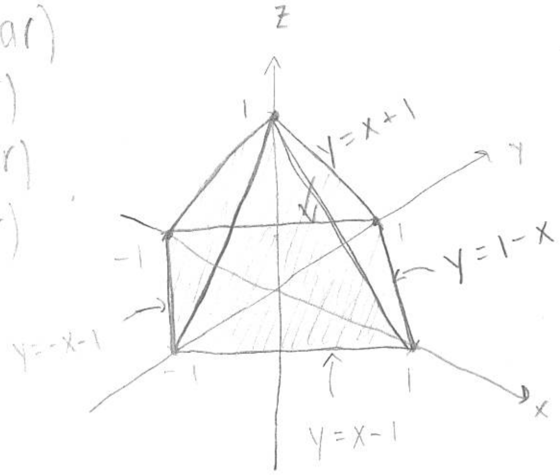
$$\int_{z=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 x^2\,dx\,dy\,dz + \int_0^1\int_0^1\int_0^1 y^2\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x^2\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^1\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 dy\,dz = \frac{2}{3}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

14.5.7. Beräkna $\iiint_R (xy + z^2)\,dV$ där $R = \{x, y, z : 0 \le z \le 1 - |x| - |y|\}$

Rita domänen: $z \ge 0 \Rightarrow 1 - |x| - |y| \ge 0 \iff |x| + |y| \le 1$

$x, y \ge 0 \Rightarrow x + y \le 1$ ($x + y = 1$ begränsar)
$x \ge 0, y \le 0 \Rightarrow x - y \le 1$ ($y = x - 1$ begränsar)
$y \ge 0, x \le 0 \Rightarrow -x + y \le 1$ ($y = x + 1$ begränsar)
$x, y \le 0 \Rightarrow -x - y \le 1$ ($y = -x - 1$ begränsar)



I z-led begränsar $z = 1 - |x| - |y|$
För $x = 0, y = 0$ får vi $z = 1$

Vi ser att integrationsdomänen är likadan i alla kvadranter, så

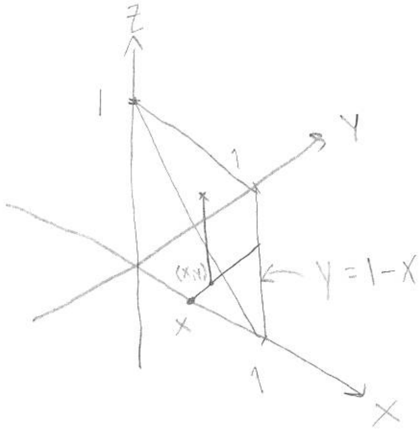
$$\iiint_R xy\,dx\,dy\,dz = 0,$$ eftersom xy antar samma värden

med olika tecken i de olika kvadranterna (pos. i kvadr 1, 3, neg i 2, 4)

Återstår gör

$$\iiint_R z^2\,dx\,dy\,dz = 4\iiint_{R_1} z^2\,dx\,dy\,dz,$$ där R_1 är delen av R i första kvadranten.

Hur beskriver vi integration över R_1?



1. Vi väljer en variabel ytterst i integreringen som ska gå mellan konstanta värden. Vi tar x.

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{1}\int_{?}\int z^2\,dy\,dz\,dx$$

2. För ett visst x, vad går y mellan? $y \in [0, 1-x]$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{?} z^2\,dz\,dy\,dx$$

3. För ett visst (x,y), vad går z mellan? $z \in [0, 1-x-y]$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{1-x-y} z^2\,dz\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{1-x-y} dy\,dx = \frac{1}{3}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}(1-x-y)^3\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{x=0}^{1}\left[-\frac{1}{4}(1-x-y)^4\right]_{y=0}^{1-x} dx = -\frac{1}{12}\int_0^1 -(1-x)^4\,dx = -\frac{1}{12}\left[\frac{1}{5}(1-x)^5\right]_0^1 = \frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow \iiint_R (xy+z^2)\,dV = 4\cdot\frac{1}{60} = \frac{1}{15}$$