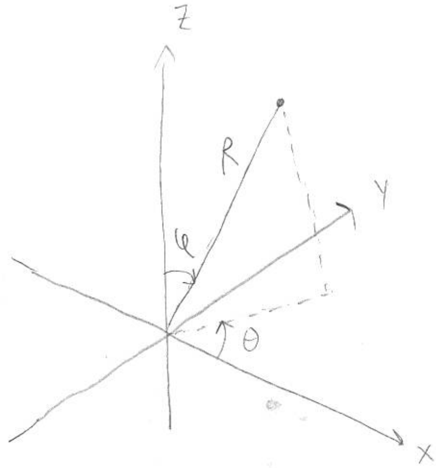
RÖ.10

Sfäriska koordinater i trippelintegraler (variabelbyte)

Integrationsområdet sfäriskt / integranden innehåller $x^2+y^2+z^2$ =1

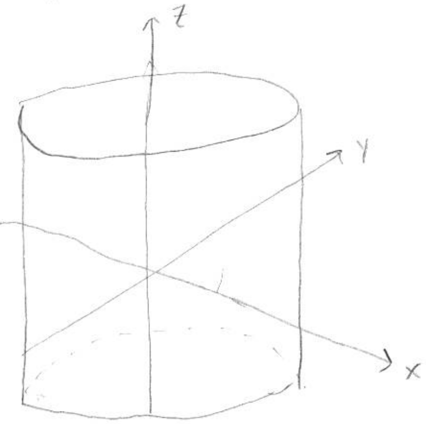
ofta lämpligt göra variabelbytet
$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow dxdydz = R^2\sin\varphi\, dR\, d\varphi\, d\theta$$



Även cylindriska koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow dxdydz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

om området är cylindriskt.

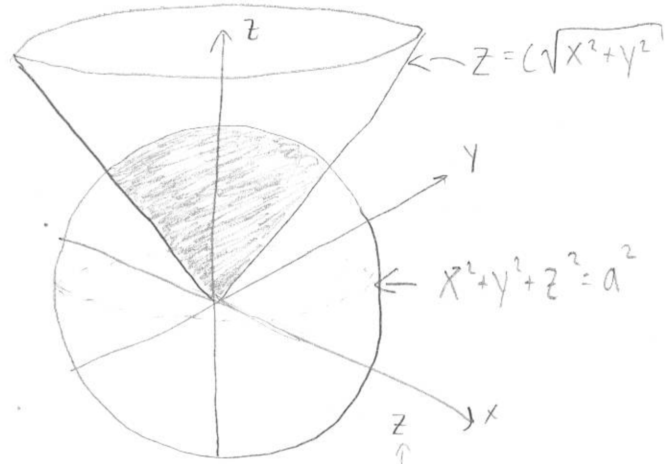


14.6.13. Beräkna $\iiint_{R_0} x^2+y^2+z^2\,dV$ där R_0 är området ovanför konen $z = c\sqrt{x^2+y^2}$

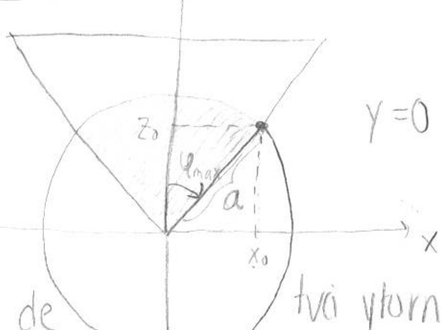
innanför sfären $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

Rita området!

Sfäriska koordinater verkar bra.



$$\iiint_{R_0} x^2+y^2+z^2\,dV = \iiint_{R_0} R^2 \cdot R^2\sin\phi\, dR\, d\phi\, d\theta$$



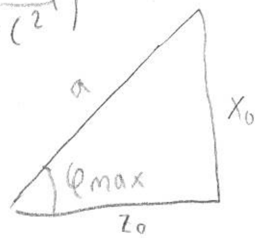
Vi ser att $R \in [0,a]$ och $\theta \in [0,2\pi]$ eftersom vi går ett helt varv.

Hur långt går φ? Vi behöver hitta skärningen mellan de två ytorna, se figur.

ytorna skär då $c^2(x^2+0^2) = a^2 - x^2 - 0^2$ (lös ut z^2 ur båda ekv., vi kollar då $y=0$)

$\Leftrightarrow c^2x^2 = a^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2(1+c^2) = a^2 \Rightarrow x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{1+c^2}} \Rightarrow z_0 = cx_0 = \dfrac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$

Vi får $\cos(\varphi_{max}) = \dfrac{z_0}{a} = \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \Rightarrow \varphi_{max} = \arccos\left(\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)$



Så $\varphi \in [0, \varphi_{max}] = \left[0, \arccos\left(\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)\right]$

$$\Rightarrow \iiint_{R_0} x^2+y^2+z^2 \, dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\arccos\left(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)}\int_{R=0}^{a} R^4 \sin\varphi \, dR \, d\varphi \, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi_{max}} \sin\varphi \left[\frac{R^5}{5}\right]_0^a d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{a^5}{5}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\varphi_{max}} d\theta =$$

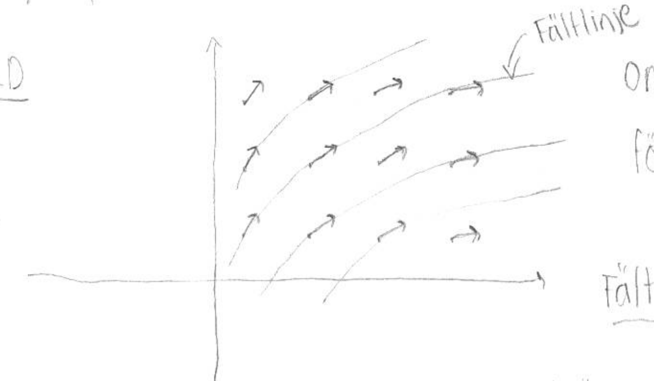
$$= \frac{a^5}{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(-\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - (-1)\right)d\theta = \frac{a^5}{5}\left(1-\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{2\pi\frac{a^5}{5}\left(1-\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)}}$$

Vektorfält och fältlinjer

En funktion i flera variabler som är vektorvärd ($F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ där $m, n \geq 2$) kallas vektorfält. $\boxed{\text{I 3D } \mathbf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(x,y,z)\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(x,y,z)\,\hat{\mathbf{k}}}$

Till varje punkt i definitionmängden hör en vektor.

ex) 2D



om man följer vektorernas riktning följer man fältets fältlinjer/strömlinjer

Fältlinjernas ekvation får man genom

att integrera/lösa $\boxed{\dfrac{dx}{F_1(x,y,z)} = \dfrac{dy}{F_2(x,y,z)} = \dfrac{dz}{F_3(x,y,z)}}$

15.1.11. Beskriv strömlinjerna för hastighetsfältet $\mathbf{V}(x,y,z) = y\hat{\mathbf{i}} - x\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$.

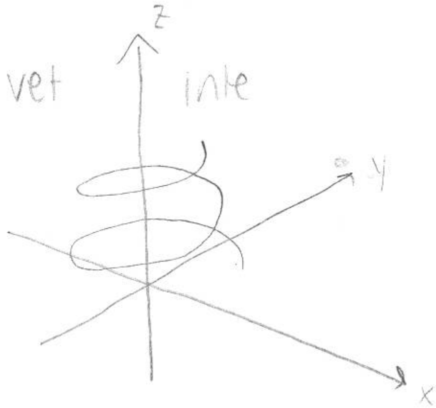
Fältlinjerna fås från $\dfrac{dx}{V_1} = \dfrac{dy}{V_2} = \dfrac{dz}{V_3}$ eller $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x} = \dfrac{dz}{1}$

Vi får lösa en likhet i taget.

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \iff -x\,dx = y\,dy \overset{\text{integrera}}{\underset{\text{båda sidor}}{\Rightarrow}} \int -x\,dx = \int y\,dy \Rightarrow$$

$$-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_0 \iff x^2 + y^2 = -C_0 \text{ eller } \underset{(1)}{x^2 + y^2 = c^2} \text{ (eftersom } x^2+y^2 \geq 0).$$

Fältlinjerna är cirklar i xy-planet, men vi vet inte på vilken höjd z ännu.



Måste använda sista uttrycket också

Vi har

$$\frac{dx}{y} = dz \quad \left(\text{eller } \frac{dy}{-x} = dz, \text{ vilket som går}\right)$$

Lös ut y ur (1) $\Rightarrow$

$$\frac{dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = dz \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}} = \int dz \iff \int \frac{dx}{c\sqrt{1-\left(\frac{x}{c}\right)^2}} = \int dz$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\arcsin\left(\frac{x}{c}\right) = z + d}} \Rightarrow x = c\sin(z+d)$$

höjden z beror på x $\Rightarrow$ fältlinjerna spiraler

Konservativa fält

Ett fält $\mathbb{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ är konservativt om det finns någon funktion $\phi(x,y,s)$ så att

$$\nabla\phi(x,y,z) = \mathbb{F}(x,y,z).$$

ϕ kallas då potentialen till F.

15.2.5. Är $\mathbb{F}(x,y,z) = (2xy - z^2)\hat{\mathbb{i}} + (2yz + x^2)\hat{\mathbb{j}} - (2zx - y^2)\hat{\mathbb{k}}$ konservativt? Hitta isf en potential, $\phi(x,y,z)$.

om $\phi(x,y,z)$ finns är

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = F_1 = 2xy - z^2 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = F_2 = 2yz + x^2 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = F_3 = y^2 - 2zx \end{cases} \iff \nabla\phi = \mathbb{F}$$

$\Rightarrow$ vi får integrera dessa och se om det går ihop med någon fkn ϕ.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy - z^2 \Rightarrow \phi(x,y,z) = x^2y - z^2x + C_1(y,z) \quad (1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2yz + x^2 \Rightarrow \phi(x,y,z) = y^2z + x^2y + C_2(x,z) \quad (2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = y^2 - 2zx \Rightarrow \phi(x,y,z) = zy^2 - xz^2 + C_3(x,y) \quad (3)$$

obs! konstanten kan bero på alla variabler man inte integrerar map, eftersom den då försv inner då man derivera

Får vi samma ϕ från alla tre ekvationer med lämpligt val av konstanter?

(1) och (2) ger att $C_1(y,z) = y^2z$ och $C_2(x,z) = -xz^2$, då är (1) = (2).

(2) och (3) ger att $C_3(x,y) = x^2y$, då är (1) = (2) = (3)

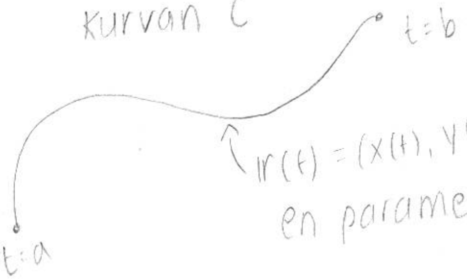
$\Rightarrow$ det finns en potential $\phi(x,y,z) = x^2y - z^2x + y^2z \ (+C)$

$\Rightarrow \mathbb{F}(x,y,z)$ är konservativt.

om vi inte kunnat välja konstanterna så att alla tre uttryck för ϕ blir lika hade $\mathbb{F}$ inte varit konservativt!

Kurvintegraler

Kurvan C



$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_{t=a}^{b} f(\mathbb{r}(t))|\mathbb{r}'(t)|\,dt$$

$\mathbb{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
en parametrisering av kurvan.

vi har ett värde i varje punkt på kurvan som vi vill summera upp

$\Rightarrow$ kurvintegral

15.3.9. Beräkna $\int_C x^2\,ds$ längs skärningen mellan planen $x-y+z=0$ (1) och $x+y+2z=0$ (2), från origo till punkten $(3,1,-2)$.

skärningen mellan två plan är en rät linje $\mathbb{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

En rät linje från $\mathbb{a}$ till $\mathbb{b}$ parametriseras $\mathbb{a} + t(\mathbb{b}-\mathbb{a})$, $t \in [0,1]$

Vi får $\mathbb{r}(t) = (0,0,0) + t(3,1,-2) = (3t, t, -2t)$, $t \in [0,1]$ och

$|\mathbb{r}'(t)| = |(3,1,-2)| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$$\Rightarrow \int_C x^2\,ds = \int_{t=0}^{1} (3t)^2\sqrt{14}\,dt = 9\sqrt{14}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \underline{3\sqrt{14}}$$