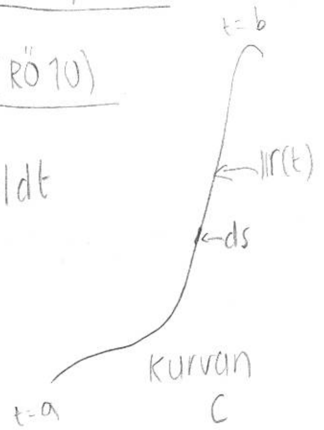
RÖ11. KURV- OCH YTINTEGRALER

Skalär kurvintegral (RÖ10)

$$\int_C f\,ds = \int_{t=a}^{b} f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

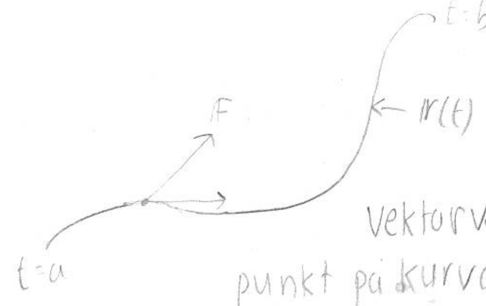


Skalärt värde i varje punkt på kurvan som vi summerar / integrerar upp.

Kurvintegral av vektorfält

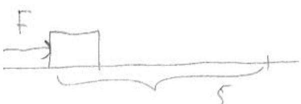
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

$$= \int_{t=a}^{b} \left[F_1(\mathbf{r}(t))\frac{dx}{dt} + F_2(\mathbf{r}(t))\frac{dy}{dt} + F_3(\mathbf{r}(t))\frac{dz}{dt} \right] dt$$



Vektorvärde i varje punkt på kurvan. Summerar / integrerar upp delen av $\mathbf{F}$ i tangentens riktn.

Ex) arbete



$W = F\cdot s$ eller

$W = \int F\,ds$ om kraften i samma riktn. som objektet rör sig

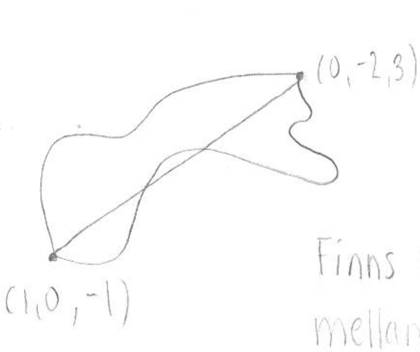
om kraften i annan riktning än objektet rör sig får vi

$$W = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

där $\mathbf{F}$ är kraften och $\mathbf{r}$ är kurvan objektet rör sig längs.

15.4.7. Beräkna arbetet kraftfältet $\mathbf{F} = (x+y)\,\hat{\mathbf{i}} + (x-z)\,\hat{\mathbf{j}} + (z-y)\,\hat{\mathbf{k}}$ uträttar då det flyttar ett objekt från $(1,0,-1)$ till $(0,-2,3)$.

Om $\mathbf{F}$ är konservativt är $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ samma för alla kurvor med samma start och slutpunkt => vi kan välja den enklaste



Finns många kurvor mellan två punkter...

Visa att $\mathbb{F}$ är konservativt (visa att $\exists \phi : \mathbb{F} = \nabla \phi$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = x + y \Rightarrow \phi = x^2 + xy + C_1(y,z) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x - z \Rightarrow \phi = xy - yz + C_2(x,z) \Rightarrow \phi = x^2 + xy - yz + z^2, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = z - y \Rightarrow \phi = z^2 - yz + C_3(x,y) \end{cases}$$

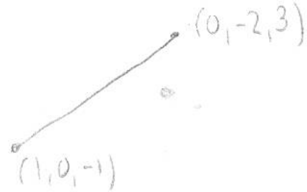
dvs $C_1(y,z) = z^2 - yz$

$C_2(x,z) = x^2 + z^2$

$C_3(x,y) = x^2 + xy$

$\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ är konservativt $\Rightarrow$ arbetet oberoende av vägen.

Vi tar den raka vägen från $(1,0,-1)$ till $(0,-2,3)$



så $\mathbb{r}(t) = (1,0,-1) + t[(0,-2,3) - (1,0,-1)]$

$= (\underbrace{1-t}_{x(t)}, \underbrace{-2t}_{y(t)}, \underbrace{-1+4t}_{z(t)}), \; t \in [0,1]$

$$\Rightarrow W = \int \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_{t=0}^{1} \left[(x(t) + y(t)) \frac{dx}{dt} + (x(t) - z(t)) \frac{dy}{dt} + (z(t) - y(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt$$

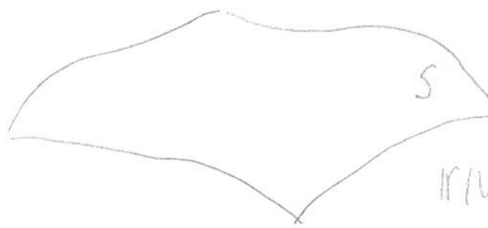
$$= \int_{t=0}^{1} (1-3t)\cdot(-1) + (2-5t)(-2) + (6t-1)\cdot 4 \, dt = \int_{t=0}^{1} 37t - 9 \, dt = \left[\frac{37t^2}{2} - 9t \right]_0^1$$

$$= \frac{37}{2} - 9 = \frac{37-18}{2} = \frac{19}{2}$$

Ytintegraler

$\iint_S f(x,y) \, dS$

$$= \iint_{u \in U \; v \in V} f(\mathbb{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \right| du \, dv$$

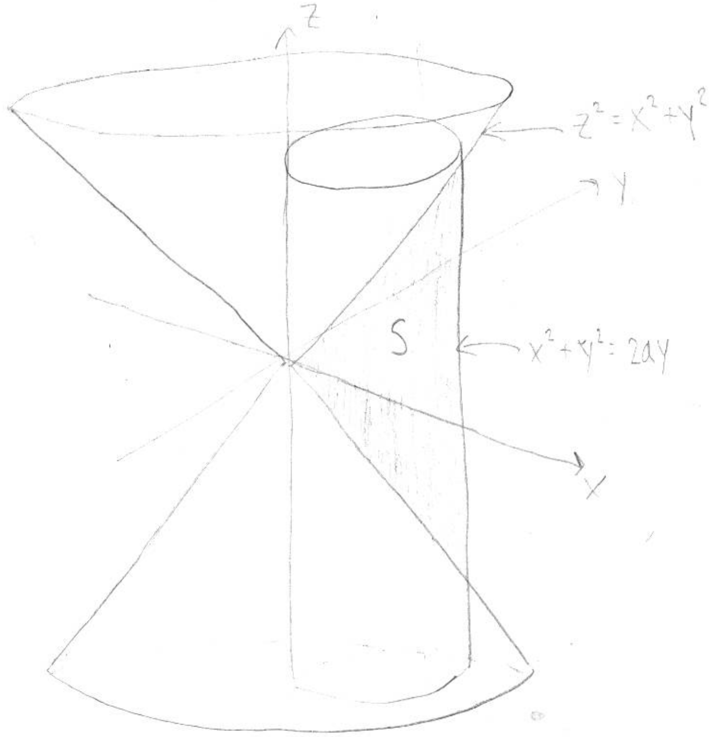


Ytan parametriseras

$\mathbb{r}(u,v) = x(u,v)\hat{\mathbb{i}} + y(u,v)\hat{\mathbb{j}} + z(u,v)\hat{\mathbb{k}}$,

$u \in U, \; v \in V$

15.5.9. Beräkna arean av den del av cylindern $x^2+y^2=2ay$ som ligger utanför konen $z^2=x^2+y^2$.



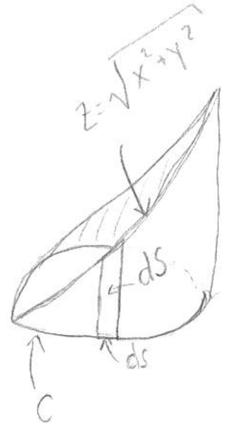
$x^2+y^2=2ay \iff x^2+(y-a)^2=a^2$

Cylinder m. radie a och centrum i $(0,a)$

- $A=\int_S dS$ där dS är areaelementet

- Symmetriskt kring xy-planet $\Rightarrow$

$A=2\int_{S,z>0} dS = 2\int_C z\,ds$



Delen av området där $z>0$

$dS=z\,ds$

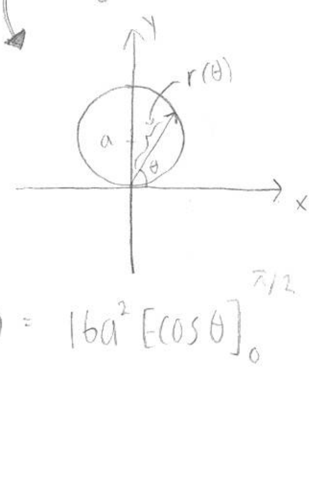
ds är en del av en cirkel $\Rightarrow$ polära koordinater

$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \mathbf{r}(\theta)=(r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta)$

$|\mathbf{r}'(\theta)| = \ldots = \sqrt{r(\theta)^2+(r'(\theta))^2}$

- Vad är $r(\theta)$? Från $x^2+y^2=2ay$ får vi

- $r^2=2ar\sin\theta \Rightarrow r=2a\sin\theta$ (r beror av θ eftersom cirkeln inte har centrum i origo)



$\Rightarrow ds=\sqrt{(2a\cdot\sin\theta)^2+(2a\cdot\cos\theta)^2}\,d\theta$

$=2a\,d\theta$

Vi får $A=2\int_C z\,ds = \{\text{området symmetriskt kring } x=0\}$

$=4\int_{C,x>0} z\,ds = 4\int_{\theta=0}^{\pi/2} r\cdot 2a\,d\theta = 8a\int_{\theta=0}^{\pi/2} 2a\sin\theta\,d\theta = 16a^2\int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta = 16a^2\,[\cos\theta]_0^{\pi/2}$

$=16a^2(-0-(-1)) = \underline{\underline{16a^2}}$

Alternativ lösning:

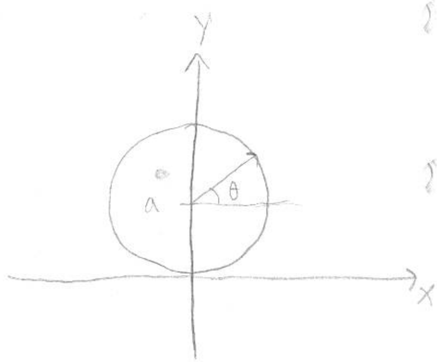
Parametrisera ytan

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta + a \\ z = z \end{cases} \qquad \mathbf{r}(\theta, z) = (a\cos\theta,\ a\sin\theta + a,\ z)$$

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right| d\theta dz = \left|\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| d\theta dz$$

$$= |-a\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} - a\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}|\,d\theta dz = a\,d\theta dz$$

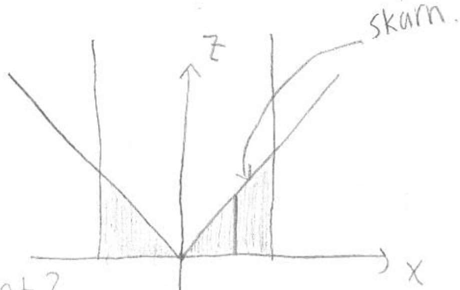
$$A = 2\iint_{S,\,z>0} dS = 2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=?} a\,dz\,d\theta = \{\ z \text{ går från } 0 \text{ till skärn.}$$



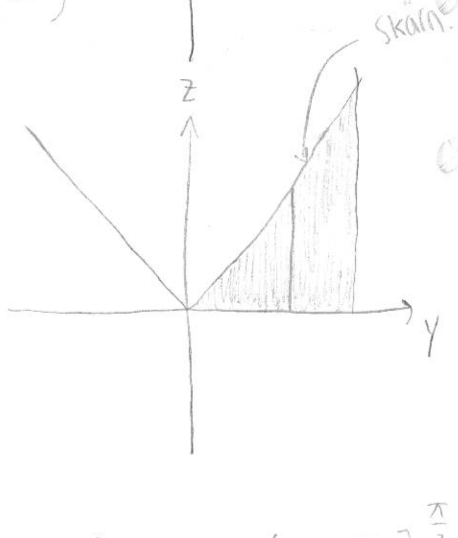
mellan de två ytorna. Där är $z = \sqrt{2ay}$

$= \sqrt{2a^2\sin\theta + 2a^2} = \sqrt{2}a\sqrt{1+\sin\theta}\ \}$

$$= 2a\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{\sqrt{2}a\sqrt{1+\sin\theta}} dz\,d\theta = 2\sqrt{2}a^2\int_{\theta=0}^{2\pi}\sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta$$



$= \{$ området symmetriskt kring $x=0$, se figur i xz-planet $\}$



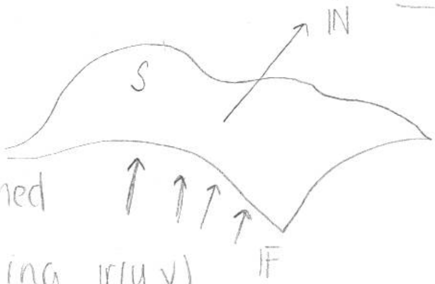
$$= 4\sqrt{2}a^2\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta = \left\{\sin\theta = -\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= 4\sqrt{2}a^2\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\sqrt{1-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\,d\theta = \left\{\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}\right\}$$

$$= 4\sqrt{2}a^2\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\,d\theta = 8a^2\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)d\theta = 8a^2\left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 8a^2(-2\cdot 0 - (-2)\cdot 1) = \underline{\underline{16a^2}}$$

Flödesintegraler



Om $\mathbf{F}$ är ett vektorfält är flödet av $\mathbf{F}$ genom en yta S med normal $\hat{\mathbf{N}}$ och parametrisering $\mathbf{r}(u,v)$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \qquad \text{där } d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\,dS = \pm\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)du\,dv$$

15.6.11. Beräkna flödet av $\mathbf{F} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z^2\hat{\mathbf{k}}$ uppåt genom ytan

$u\cos v\,\hat{\mathbf{i}} + u\sin v\,\hat{\mathbf{j}} + u\hat{\mathbf{k}}$, $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le \pi$.

$$\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\hat{\mathbf{i}} + u\sin v\,\hat{\mathbf{j}} + u\hat{\mathbf{k}} = x(u,v)\,\hat{\mathbf{i}} + y(u,v)\,\hat{\mathbf{j}} + z(u,v)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \cos v\,\hat{\mathbf{i}} + \sin v\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u\sin v\,\hat{\mathbf{i}} + u\cos v\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = -u\cos v\,\hat{\mathbf{i}} - u\sin v\,\hat{\mathbf{j}} + u\hat{\mathbf{k}}$$

$\Rightarrow d\mathbf{S} = (-u\cos v\,\hat{\mathbf{i}} - u\sin v\,\hat{\mathbf{j}} + u\hat{\mathbf{k}})\,du\,dv$ (eftersom $u \ge 0$ och vi vill ha flöde uppåt, om $u \le 0$ hade vi fått byta tecken)

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = (u\cos v\,\hat{\mathbf{i}} + u\sin v\,\hat{\mathbf{j}} + u^2\hat{\mathbf{k}})\cdot(-u\cos v\,\hat{\mathbf{i}} - u\sin v\,\hat{\mathbf{j}} + u\hat{\mathbf{k}})$$

$$= -u^2\cos^2 v - u^2\sin^2 v + u^3 = u^3 - u^2$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{v=0}^{\pi}\int_{u=0}^{2} u^3 - u^2\,du\,dv = \pi\left[\frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3}\right]_0^2 = \pi\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$$