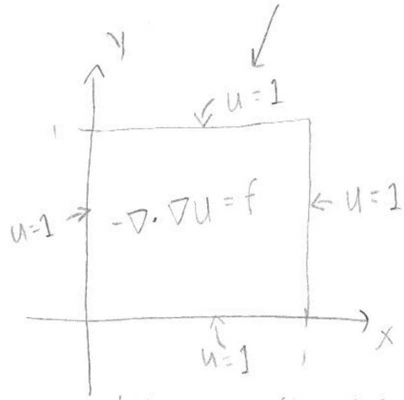
RÖ 13. FEM i 2D

Kom ihåg, FEM approximativ metod för att lösa diff.ekvationer, t.ex.

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad \text{eller i 2D} \quad \begin{cases} -\nabla \cdot \nabla u(x,y) = f(x,y), & 0 \le x, y \le 1 \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,1) = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Bygger på svag formulering av problemet

1. Multiplicera diffekv. m. en testfunktion $v(x,y)$, som uppfyller $v = 0$ där randvillkoren är u = konstant (Dirichletrandvillkor)
2. Integrera över domänen och använd p.i. för att få bort derivator.
3. Skriv ned den svaga formen.



hitta en fkn som uppfyller detta

Partiell integration i 2D

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbb{F}\, \phi \, dA = \int_{\partial D} \hat{\mathbb{N}} \cdot \mathbb{F}\, \phi \, ds - \iint_D \mathbb{F} \cdot \nabla \phi \, dA$$

randen av D

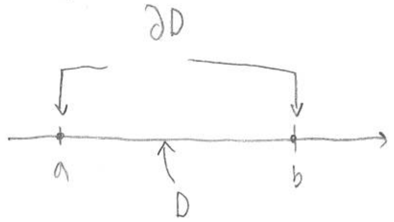
flyttar derivatan till ϕ ist för $\mathbb{F}$

Jfr 1D

$$\int_a^b f'\phi \, dx = [f\phi]_a^b - \int_a^b f\phi' \, dx$$

flyttar derivatan till ϕ ist. för f

$$= \int_{\partial D} f\phi$$



bara två punkter så det blir en summa över dem.

Jfr 3D

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbb{F}\, \phi \, dV = \iint_{\partial D} \hat{\mathbb{N}} \cdot \mathbb{F}\, \phi \, dS - \iiint_D \mathbb{F} \cdot \nabla \phi \, dV$$

FEM 2.2

a) Skriv randvärdesproblemet för värmeledning i kvadraten $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ med

- värmeledningskoeff. $a = (1+xy)$
- inga värmekällor, $f = 0$
- omgivande temp. $u_a = 10$
- värmeöverföringskoeff. $k = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 7, & x=1 \\ \infty, & y=0, y=1. \end{cases}$
- inga värmekällor på randen, $g = 0$.

Värmeledningsekv.

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f \text{ i } D \\ a D_{\hat{N}} u + k(u-u_a) = g \text{ på } S = \partial D \end{cases}$$

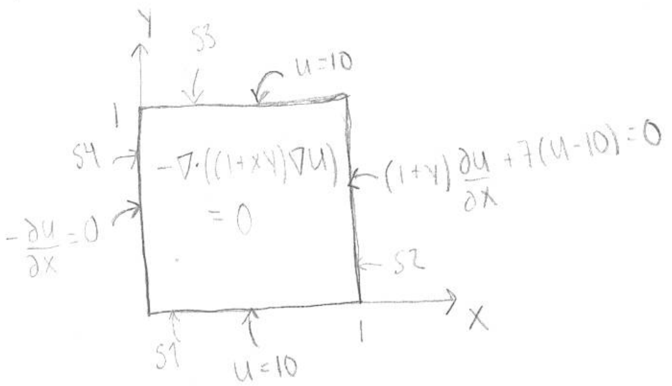
$\uparrow$ randen

b) Skriv ned svaga formuleringen av problemet.

Lösn.

a) Med givna värden får vi

$$\begin{cases} -\nabla\cdot((1+xy)\nabla u) = 0, & 0 < x, y < 1 \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \\ (1+y)\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) + 7(u(1,y) - 10) = 0 \\ u(x,0) = u(x,1) = 10 \end{cases}$$



b) 1. Multiplicera med testfunktion v och integrera över D.

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} -\nabla\cdot((1+xy)\nabla u)\, v(x,y)\, dx\, dy = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} 0\cdot v(x,y)\, dx\, dy = 0$$

där $v(x,0) = v(x,1) = 0$

2. Partiell integration $\iint_D \nabla\cdot F\,\phi\,dA = \int_S \hat{N}\cdot F\phi\,ds - \iint_D F\cdot\nabla\phi\,dV$

$$\int_0^1\int_0^1 -\nabla\cdot((1+xy)\nabla u)\,v\,dx\,dy = -\int_S \hat{N}\cdot((1+xy)\nabla u)\,v\,ds + \int_0^1\int_0^1((1+xy)\nabla u)\cdot\nabla v\,dx\,dy$$

$$= \left\{\text{dela upp } S \text{ i sina fyra delar, } \int_S = \int_{S1}+\int_{S2}+\int_{S3}+\int_{S4}\right\} = -\int_{x=0}^{1}(0,-1)\cdot\nabla u\,\overset{0}{\cancel{v(x,0)}}\,dx$$

$$-\int_{y=0}^{1}(1,0)\cdot((1+y)\nabla u)\,v(1,y)\,dy - \int_{x=1}^{0}(0,1)((1+x)\nabla u)\,\overset{0}{\cancel{v(x,1)}}\cdot(-dx) - \int_{y=1}^{0}(-1,0)\cdot\nabla u\,v(0,1)(-dy)$$

$$+\int_0^1\int_0^1((1+xy)\nabla u)\cdot\nabla v\,dx\,dy = -\int_{y=0}^{1}(1+y)\frac{\partial u}{\partial x}(1,y)\,v(1,y)\,dy - \int_{y=0}^{1} -\overset{0}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)}}\,v(0,1)\,dy$$

$$+\int_0^1\int_0^1((1+xy)\nabla u)\cdot\nabla v\,dx\,dy = \{\text{använd randvillkoren}\} = -\int_{y=0}^{1}(70-7u(1,y))\,v(1,y)\,dy$$

$$+\int_0^1\int_0^1((1+xy)\nabla u)\cdot\nabla v\,dx\,dy = \{\text{sätt lika med högersidan}\} = 0$$

$\Rightarrow$ {samla alla termer med u på vänster sida}

$$\int_0^1\int_0^1((1+xy)\nabla u)\cdot\nabla v\,dx\,dy + 7\int_{y=0}^{1}u(1,y)\,v(1,y)\,dy = 70\int_{y=0}^{1}v(1,y)\,dy$$

då $v(x,0) = v(x,1) = 0$

3. Formulera

man måste alltid nämna de konstanta randvillkoren.

Hitta $u(x,y)$ med $u(x,0) = u(x,1) = 10$ så att

$$\int_0^1\int_0^1((1+xy)\nabla u)\cdot\nabla v\,dx\,dy + 7\int_{y=0}^{1}u(1,y)\,v(1,y)\,dy = 70\int_{y=0}^{1}v(1,y)\,dy$$

för alla $v(x,y)$ med $v(x,0) = v(x,1) = 0$.