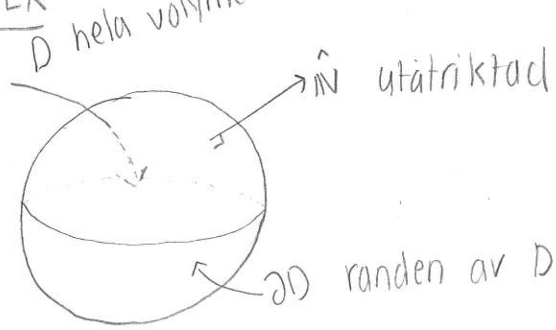
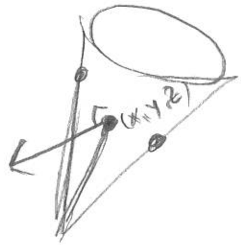
RÖ14. DIVERGENSSATSEN + YTINTEGRALER



Divergenssatsen

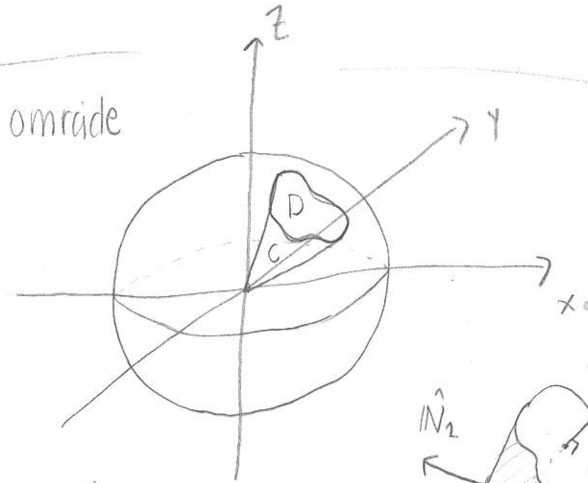
$$\underbrace{\iiint_D \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV}_{\text{det som produceras i området D}} = \underbrace{\iint_{\partial D} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS}_{\text{måste vara det som flödar ut genom randen till D.}}$$

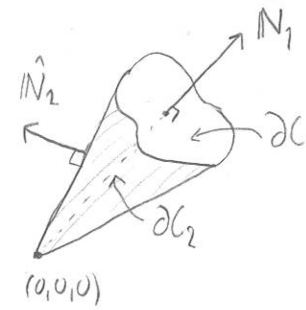


16.4.9. Låt A vara arean av ett område D som är del av ytan av en sfär med radie R och centrum i origo.

Låt V vara volymen av konen C som bildas genom att dra linjer från origo till D.

Visa att $V = \frac{1}{3}AR$ genom att använda divergenssatsen på $\mathbb{F} = (x, y, z)$.





Vi ser att $\iiint_C \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \left\{ \nabla \cdot \mathbb{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x, y, z) = 3 \right\} = 3 \iiint_C dV$

$= 3V = \{\text{divergenssatsen}\} = \iint_{\partial C} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_{\partial C_1} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}_1\, dS + \iint_{\partial C_2} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}_2\, dS$

$= \Big\{ \mathbb{N}_1 = \underbrace{(x, y, z)}_{\text{en punkt på ytan}} - \overbrace{(0, 0, 0)}^{\text{origo}} \Rightarrow \hat{\mathbb{N}}_1 = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\hat{\mathbb{N}}_2$ vinkelrät mot alla vektorer $\mathbb{V}$ från origo till en punkt (x, y, z) på ∂C_2 $(\mathbb{V} = (x, y, z)) \Rightarrow (x, y, z) \cdot \hat{\mathbb{N}}_2 =$

$= \underline{\mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}_2 = 0}$ på $\partial C_2 \Big\}$

$= \iint_{\partial C_1} (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dS + 0 = \iint_{\partial C_1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dS = \left\{ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R \text{ på } \partial C_1 \right\}$

$$= R \iint_{\partial C_1} dS = R \cdot A = A \cdot R$$

Vi har $3V = A \cdot R \Rightarrow V = \frac{1}{3} AR$ VSV.

Repetition ytintegraler

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v)) \underbrace{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du\,dv}_{dS}$$

Metod

1. Rita upp området S. Kan vara lättare rita i t.ex. xy-, xz- och yz-planen.
2. Bestäm typ av parametrar, oftast (x,y), (r,θ), (θ,φ), (θ,z) beroende på S form.
3. Parametrisera ytan, dvs uttryck punkterna på ytan

   $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $u,v \in D$

4. Hitta $dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du\,dv$.
5. Uttryck f mha parametriseringen. $f(x,y,z) = f(\mathbf{r}(u,v))$
6. Hitta området D som u,v tillhör.
7. Integrera över D.

jfr flödesintegral $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

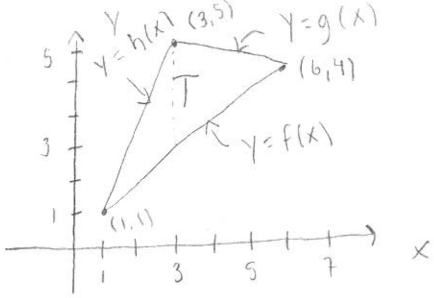
Skillnad $d\mathbf{S} = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,du\,dv$

jfr kurvintegral $\int_C f\,ds = \int_{t=a}^{b} f(\mathbf{r}(t)) \underbrace{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt}_{ds}$

Skillnad endast en parameter, $ds = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$ (samma form som dS!)

exempel

1. Beräkna arean av triangeln T



$f(x), g(x), h(x)$ linjära funktioner

$$A = \iint_T dS = \iint_T dx\,dy$$

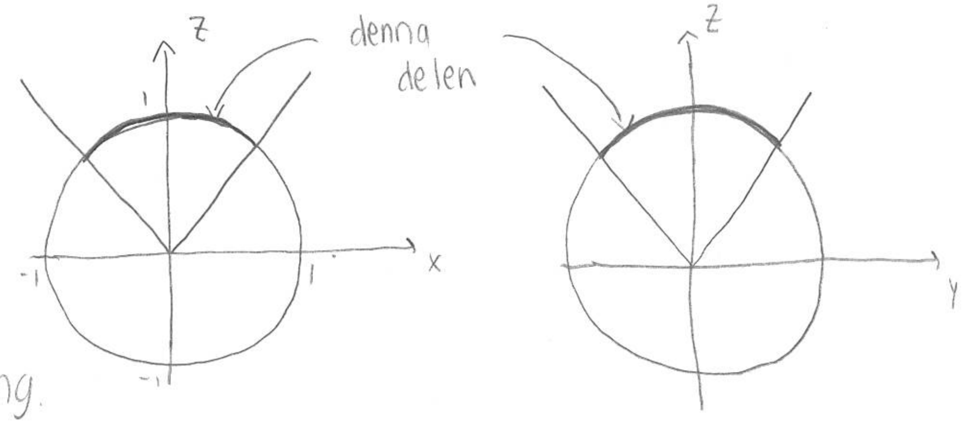
1-5. kommer automatiskt med x, y som parametrar.

6. Bestäm en av parametrarna som går mellan konstanta värden och kolla för ett godt. val av denna vad den andra parametern går mellan för värden.

$$\int_{x=1}^{6}\int_{y=?} dx\,dy = \int_{x=1}^{3}\int_{y=f(x)}^{h(x)} dx\,dy + \int_{x=3}^{6}\int_{y=f(x)}^{g(x)} dx\,dy = \{7\} = \int_{x=1}^{3} h(x) - f(x)\,dx$$

$$+ \int_{x=3}^{6} g(x) - f(x)\,dx = \{\text{hitta } f(x), g(x), h(x)\} = \ldots$$

2. Beräkna arean av den del av klotet $x^2+y^2+z^2=1$ som ligger ovanför konen $z=\sqrt{x^2+y^2}$.



Vi är på ytan av en sfär
⇒ sfäriska koordinater med R=1 är en bra parametrisering.

$$\begin{cases} x = 1\cdot\sin\phi\cos\theta \\ y = 1\cdot\sin\phi\sin\theta \\ z = 1\cdot\cos\phi \end{cases}, \quad \mathbb{r}(\phi,\theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

⇒

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{d\theta} \right| d\phi d\theta = \left| \begin{vmatrix} \hat{\mathbb{i}} & \hat{\mathbb{j}} & \hat{\mathbb{k}} \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi \\ -\sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \right| d\phi d\theta$$

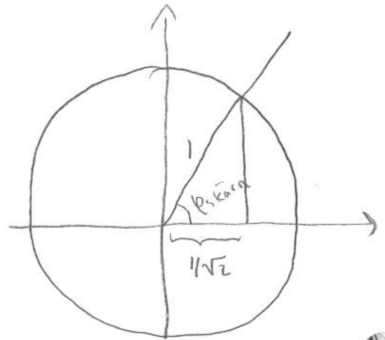
$$= \left|\left(\sin^2\phi\cos\theta, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi\overbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}^{1} \right)\right| d\phi d\theta$$

$$= \sqrt{\sin^4\phi\cos^2\theta + \sin^4\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos^2\phi}\, d\phi d\theta$$

$$= \sqrt{\sin^4\phi + \sin^2\phi\cos^2\phi}\, d\phi d\theta = \sqrt{\sin^2\phi(\underbrace{\sin^2\phi + \cos^2\phi}_{1})}\, d\phi d\theta = \sin\phi\, d\phi d\theta$$

Ett helt varv $\Rightarrow \theta \in (0, 2\pi)$

$\phi \in (0, \phi_{skärn})$ där $\phi_{skärn}$ är vinkeln där de två kurvorna skär varandra



kurvorna skär då $x^2+y^2 = 1-x^2-y^2 \iff x^2+y^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \phi_{skärn} = \frac{\pi}{4}$

Vi får $A = \iint_S dS = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4} \sin\phi\, d\phi d\theta = 2\pi\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/4}$

$= 2\pi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - (-1)\right) = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\pi(\sqrt{2}-1)$