SISTA RÖ INNAN SOMMAREN

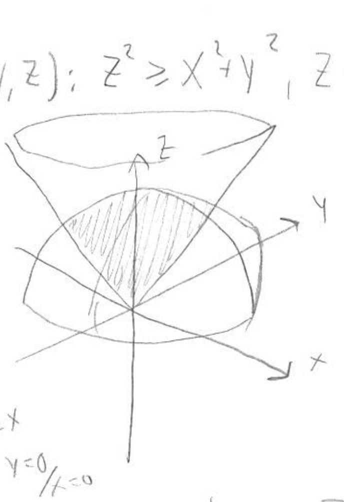
- volymintegral
- svag formulering
- flöde
- kurvintegral
- härledning av partiell integration
- max/min i begränsat område
- gränsvärde i 2D
- pde toolbox
- linjär approx.
- tangentplan / tangentlinje
- riktningsderivata

140527. 5. Beräkna $\iiint_D x^3y^2z\,dV$, där $D = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy\}$

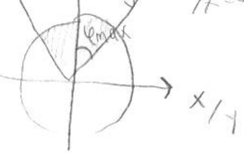
$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}\int_{z=0}^{xy} x^3y^2z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^x x^3y^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{xy} dy\,dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} x^5y^4\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1} x^5\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^x dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}\frac{x^{10}}{5}\,dx = \frac{1}{10\cdot 11}\left[x^{11}\right]_0^1 = \frac{1}{110}$$

130116.5. Beräkna volymen av området $D = \{(x,y,z) : z^2 \ge x^2+y^2,\ z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 9\}$.



Sfäriska koord $\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases}$ $dV = R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta$

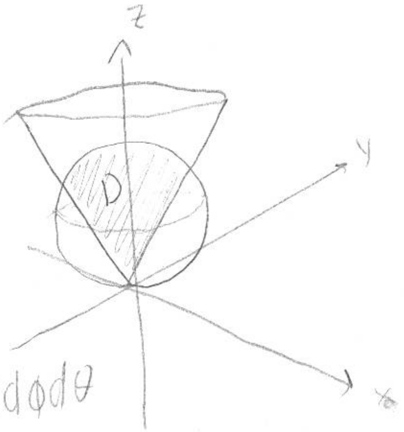


$\Rightarrow \phi_{max} = \frac{\pi}{4}$

$$V = \iiint_D dV = \int_{R=0}^{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4} R^2 \sin\phi \, dR\, d\phi\, d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/4} \left[\frac{R^3}{3}\right]_0^3 \sin\phi \, d\phi = 18\pi \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/4}$$

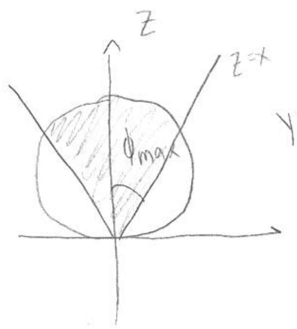
$$= 18\pi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - (-1)\right) = 9\pi(2-\sqrt{2})$$

15.0415.6. Beräkna volymen av området ovanför konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ och under sfären $x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.



$$V = \iiint_D dV$$

Sfäriska koord. $\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases}$, $dV = R^2 \sin\phi \, dR\, d\phi\, d\theta$



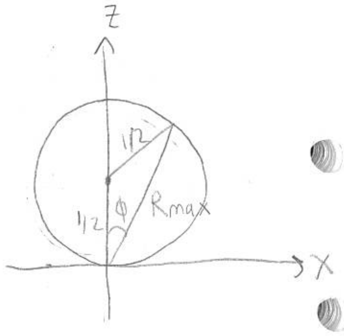
$y=0$ (samma för $x=0$)

$\Rightarrow \phi_{max} = \frac{\pi}{4}$

Integrationsgränser?

Ett helt varv $\Rightarrow \theta \in [0, 2\pi]$

$\phi \in [0, \phi_{max}] = [0, \pi/4]$, se bild t.h.



Eftersom sfären inte har centrum i origo beror R_{max} av ϕ

cosinussatsen ger $(\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 + R_{max}^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot R_{max}\cdot\cos\phi$

$\Rightarrow R_{max} = \cos\phi$

$\Rightarrow R \in [0, R_{max}] = [0, \cos\phi]$

Vi får $$V = \iiint_D dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{R=0}^{\cos\phi} R^2 \sin\phi \, dR\, d\phi\, d\theta = 2\pi \int_{\phi=0}^{\pi/4} \sin\phi \left[\frac{R^3}{3}\right]_0^{\cos\phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_{\phi=0}^{\pi/4} \sin\phi \cos^3\phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{1}{4}\cos^4\phi\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{6}\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - (-1)\right) = \frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

150415.4. Härled svaga formuleringen av $\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) = f, & i\ D, \\ aD_{\hat{N}}u + k(u-u_a) = g, & på\ S. \end{cases}$

Mult. m. testfunktion v och integrera partiellt över D

$$\iiint_D -\nabla\cdot(a\nabla u)\, v\, dV = \{p.i\} = -\iint_S \hat{N}\cdot a\nabla u\, v\, dS + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\, dV$$

$$= -\iint_S aD_{\hat{N}}u\, v\, dS + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\, dV = \{\text{anv. randvillkor}\}$$

$$= \iint_S (k(u-u_a)-g)\, v\, dS + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\, dV = \{\text{sätt lika m. h.l.}\} = \iiint_D f v\, dV$$

Flytta allt med u till vänster led

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\, dV + \iint_S k u v\, dS = \iiint_D f v\, dV + \iint_S (k u_a + g)\, v\, dS \qquad (*)$$

Svag formulering av problemet:

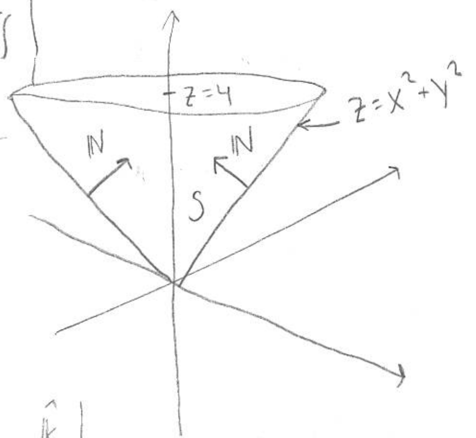
Hitta u så att

(*)

gäller för alla testfunktioner v.

110827.6. Beräkna flödet av $\mathbb{F} = (x, y, 0)$ genom den del av ytan $z = x^2 + y^2$ som ligger under planet $z = 4$. Ytan orienteras med uppåtriktad normal.

$$\boxed{\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}}$$



- Parametrisera ytan

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r^2 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2)$$

- Hitta $d\mathbb{S} = \underset{(-)}{+} \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial \theta}\, dr\, d\theta = \underset{(-)}{+} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} dr\, d\theta$

$= \underset{(-)}{+}(-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r)$. uppåtnormal $\Rightarrow$ z-komp. i $d\mathbb{S} \geq 0 \Rightarrow$ vi väljer positivt tecken.

- Hitta gränser för r, θ. $\theta \in [0, 2\pi]$ (ett helt varv)
  $r \in [0, r_{max}]$ där r_{max} radien då $z = 4$.

Eftersom $z = r^2 \Rightarrow r_{max} = 2$.

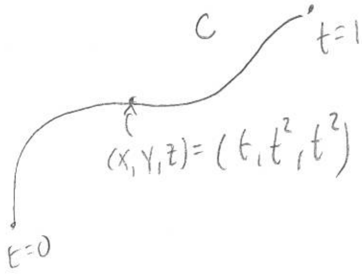
- Uttryck $\mathbb{F}$ i $\mathbb{r}(r,\theta)$, dvs byt ut x mot $r\cos\theta$, y mot $r\sin\theta$ och z mot r^2.

$\Rightarrow \mathbb{F}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$

- Beräkna flödet $= \iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \cdot (-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r)\, dr\, d\theta$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} -2r^3\, dr\, d\theta = 2\pi \left[-\frac{2}{4} r^4 \right]_0^2 = -16\pi$$

120111.5. Beräkna $\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$ där $\mathbb{F}=(xy,\ xz,\ yz)$ och $C: \mathbb{r}(t)=(t, t^2, t^2)$, $t\in[0,1]$



- $\mathbb{F}$ är uttr. i (x,y,z) och kurvan i $t \Rightarrow$ uttryck $\mathbb{F}$ i t, $\mathbb{F}=\mathbb{F}(\mathbb{r}(t))=(t^3, t^3, t^4)$

- Hitta $d\mathbb{r}=\frac{d\mathbb{r}}{dt}dt = (1, 2t, 2t)\,dt$

- $\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_{t=0}^{1} (t^3, t^3, t^4)\cdot(1, 2t, 2t)\,dt = \int_{t=0}^{1} t^3+2t^4+2t^5\,dt = \left[\frac{t^4}{4}+\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{3}t^6\right]_0^1$

$$= \frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3} = \frac{15+24+20}{60} = \frac{59}{60}$$

140115.8. Härled partialintegrationsformeln $\iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\,\phi\,dV = \iint_S \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\,\phi\,dS - \iiint_D \mathbb{F}\cdot\nabla\phi\,dV$

Allt som behövs är <u>Gauss sats + produktregeln</u>.

- Gauss sats $\iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV = \iint_S \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\,dS$

- Produktregeln $\nabla\cdot(\mathbb{F}\phi) = \nabla\cdot\mathbb{F}\,\phi + \mathbb{F}\cdot\nabla\phi$

$$\iiint_D \nabla\cdot(\mathbb{F}\phi)\,dV = \{\text{produktregeln}\} = \iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\,\phi\,dV + \iiint_D \mathbb{F}\cdot\nabla\phi\,dV$$

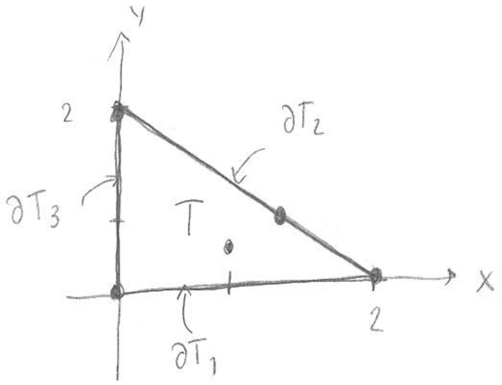
$$= \{\text{divergenssatsen}\} = \iint_S \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\,\phi\,dS$$

Vi får

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}\,\phi\,dV = \iint_S \hat{\mathbb{N}}\cdot\mathbb{F}\,\phi\,dS - \iiint_D \mathbb{F}\cdot\nabla\phi\,dV$$

Kom ihåg: använd divergenssatsen på produktregeln.

14.08.30. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = x^2y - x - y$ på den slutna triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,2)$.



Max/min finns i

- kritiska punkter, $\nabla f = 0$
- singulära punkter, ∇f ej def.
- randpunkter till området.

- Kritiska punkter

$$\nabla f = (2xy - 1, x^2 - 1) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2x} \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{(1, \frac{1}{2})}, (-1, -\frac{1}{2})$ kritiska punkter.

Endast $(1, \frac{1}{2})$ ligger i triangeln!

Kandidatpunkter
$(1, \frac{1}{2}), (0,0), (2,0), (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}),$
$(0,2)$

- Singulära punkter

Saknas, snäll funktion

- randpunkter

∂T_1: $y = 0 \Rightarrow$ vi får funktionen $g(x) = f(x,0) = -x$ som vi ska maximera/minimera för $x \in [0,2]$.

Vi får kolla kritiska, singulära och randpunkter i detta nya område.

- kritiska punkter
  $g'(x) = -1 \Rightarrow$ kritiska punkter saknas
- singulära saknas
- randpunkter $(0,0)$, $(2,0)$

$\underline{\partial T_2}$: $y = 2 - x$ $\quad g(x) = f(x, 2-x) = x^2(2-x) - x - 2 + x = -x^3 + 2x^2 - 2$, $x \in [0,2]$

$g'(x) = -3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ eller $x = \frac{4}{3} \Rightarrow$ kritisk punkt $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

ej inre punkt i intervallet

randpunkter $(0,2)$, $(2,0)$, singulära saknas

$\underline{\partial T_3}$: $x = 0$ $\quad g(y) = f(0,y) = -y$, $y \in [0,2]$

$g'(y) = -1 \Rightarrow$ inga kritiska punkter

randpunkter $(0,0)$, $(0,2)$

<u>Kolla kandidatpunkterna</u>

$f\left(1, \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -1$

$\underline{f(0,0) = 0} \leftarrow \text{max}$

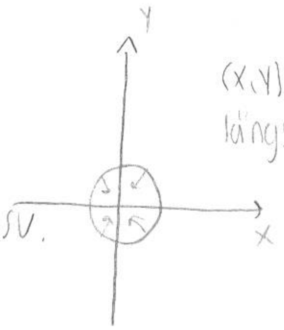
$\underline{f(2,0) = -2} \leftarrow \text{min}$

$f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{32 - 36 - 18}{27} = -\frac{22}{27}$

$\underline{f(0,2) = -2} \leftarrow \text{min}$

130116. 1 b) undersök gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Kolla längs några olika riktningar vad vi får för gränsv.



$(x,y) \to (0,0)$ längs alla dessa riktningar

$\underline{x = 0}$: $\lim\limits_{y \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$

$\underline{y = 0}$: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

olika gränsvärde beroende på vilken riktning vi tar mot origo

$\Rightarrow$ gränsvärdet existerar ej.

150415. Pde toolbox har dessa beteckningar för randvillkor

$$n \cdot (c \nabla u) + qu = g \quad \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}$$

$$hu = r \quad \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}$$

vad fylla i på en rand som är isolerad med värmeöverföringskoeff 5, omgivande temperatur 10 och inga yttre värmekällor.

q = värmeöverf. koeff = 5

g = värmeöverf. koeff * omg. temp + yttre värmekällor $= 5 \cdot 10 + 0 = 50$.

jfr $a D_{\hat{N}} u + \underbrace{k}_{\text{värmeöverf. koeff}}(u - \overbrace{u_a}^{\text{omg. temp}}) = \underbrace{g}_{\text{källor}} \iff a D_{\hat{N}} u + ku = ku_a + g$

140115.2. Beräkna linjära approximationen till $f(x) = x_1 e^{x_2 x_3} - \sqrt{x_1 - x_2^2}$ kring $(4,1,0)$

$$L(x) = f(4,1,0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(4,1,0)(x_1 - 4) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(4,1,0)(x_2 - 1) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(4,1,0)\, x_3$$

$$= 4 - \sqrt{3} + \left(e^{x_2 x_3} - \frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2^2}}\right)\Bigg|_{(4,1,0)} (x_1 - 4) + \left(x_1 x_3 e^{x_2 x_3} - \frac{1 \cdot (-2x_2)}{2\sqrt{x_1 - x_2^2}}\right)\Bigg|_{(4,1,0)} (x_2 - 1)$$

$$+ \left(x_1 x_2 e^{x_2 x_3}\right)\Big|_{(4,1,0)} x_3 = 4 - \sqrt{3} + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)(x_1 - 4) + \left(0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x_2 - 1)$$

$$+ 4x_3$$

140115.1.a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ellipsoiden med ekvation $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ i punkten $(1, 2, \sqrt{2})$.

Bilda $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16$

Då är ekvationen uppfylld för nivåytan $f(x,y,z) = 0$

Gradienten är normal till nivåytan i punkten $\Rightarrow$ planets normal är

$$n = \nabla f(1,2,\sqrt{2}) = (8x, 2y, 8z)\Big|_{(1,2,\sqrt{2})} = (8, 4, 8\sqrt{2})$$

Med en punkt (p_1,p_2,p_3) och en normal (n_1,n_2,n_3) har vi planets ekvation

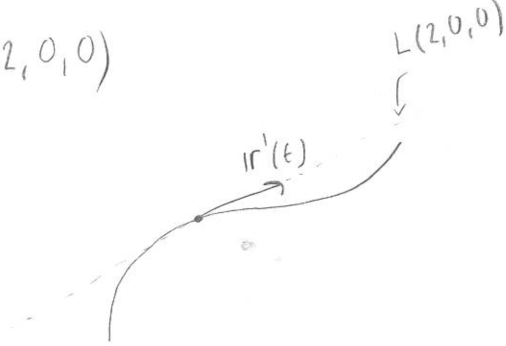
$$(n_1,n_2,n_3)\cdot(x-p_1,\ y-p_2,\ z-p_3)\quad 0$$

$\Rightarrow$ vi får $\quad 8(x-1)+4(y-2)+8\sqrt{2}(z-\sqrt{2})=0 \quad \Leftrightarrow$

$$8x+4y+8\sqrt{2}z = 32 \quad \Leftrightarrow$$

$$2x+y+2\sqrt{2}z = 8$$

120901.1.b) Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $\mathbb{r}(t) = 2\cos(t)\,\hat{\mathbb{i}} + 2\sin(t)\,\hat{\mathbb{j}} + t\,\hat{\mathbb{k}}$, i punkten $(2,0,0)$



Linjens lutning är $\mathbb{r}'(t)$ med det t som ger oss punkten $(2,0,0)$ på kurvan $\mathbb{r}(t)$.
Vi ser att $t=0$ ger $\mathbb{r}(0)=(2,0,0)$.

$$\mathbb{r}'(t) = -2\sin t\,\hat{\mathbb{i}} + 2\cos t\,\hat{\mathbb{j}} + \hat{\mathbb{k}}$$

$$\mathbb{r}'(0) = 2\hat{\mathbb{j}} + \hat{\mathbb{k}} = (0,2,1)$$

En linje beskrivs av en punkt och en riktning

$$L(t) = (2,0,0) + t(0,2,1) = (2,\ 2t,\ t)$$

13.0831.1.a) Beräkna riktningsderivatan av $f(x,y,z) = x^2+y^2-4z$ i punkten $(2,-1,1)$ i riktningen $\mathbb{u} = \hat{\mathbb{i}} + \hat{\mathbb{j}} - \hat{\mathbb{k}}$

$$D_{\mathbb{u}}f = \hat{\mathbb{u}}\cdot\nabla f(2,-1,1) = \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}}\cdot(2x,2y,-4)\Big|_{(2,-1,1)} = \frac{(1,1,-1)\cdot(4,-2,-4)}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4-2+4}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$