Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2010–01–12, f J

Telefon: Richard Lärkäng, 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Rättningen förväntas inte bli klar förrän omkring den 2 februari på grund av utlandsvistelse.

Granskning: torsdag 11 februari, 12–13, hos Stig Larsson.

Teknologer inskrivna 2006 och tidigare löser uppgifterna på baksidan av detta blad. (Man kan välja att göra uppgifterna på framsidan men inte blanda.)

---

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (2x + 3y)\,dx\,dy$ där D är området som definieras av olikheterna $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$.

2. Undersök funktionen $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter.

3. Skriv ned hur man löser uppgift 2 med hjälp av våra Matlab-program `newton.m` och `jacobi.m`.

4. Beräkna båglängdsintegralen $\int_C \frac{y}{x}\,ds$, där C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2 = 3y$ och $2xy = 9z$ från origo till punkten $(3, 3, 2)$. Tips: välj $t = x$ som parameter.

5. Beräkna riktningsderivatan av funktionen $f(x, y, z) = x^2 y - 3z$ i punkten $(-1, 1, 2)$ i riktningen $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$. I vilken riktning växer f snabbast i denna punkt och hur stor är riktningsderivatan då?

6. Beräkna volymen av det område som begränsas av xy-planet och paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$.

7. Beräkna ytintegralen $\iint_S z\,dS$, där S är halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$.

8. (a) Bevisa att gradienten är normalvektor till nivåkurvan. (4 p)

(b) Härled randvillkoret

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g \quad \text{på } S$$

för värmeledningsekvationen. Förklara vad termerna $a, u, k, u_A, g, S, \hat{\mathbf{N}}, S$ betyder. (4 p)

`/stig` **Vänd!**

För teknologer inskrivna 2006 och tidigare.

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (2x + 3y)\,dx\,dy$ där D är området som definieras av olikheterna $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$.

2. Undersök funktionen $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter.

3. Bestäm Taylors polynom av grad 2 för funktionen $f(x, y) = \ln(2x + y^2) - 2y + 5$ kring punkten $(0, 1)$.

4. Beräkna båglängdsintegralen $\int_C \frac{y}{x}\,ds$, där C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2 = 3y$ och $2xy = 9z$ från origo till punkten $(3, 3, 2)$. Tips: välj $t = x$ som parameter.

5. Beräkna riktningsderivatan av funktionen $f(x, y, z) = x^2y - 3z$ i punkten $(-1, 1, 2)$ i riktningen $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$. I vilken riktning växer f snabbast i denna punkt och hur stor är riktningsderivatan då?

6. Beräkna volymen av det område som begränsas av xy-planet och paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$.

7. Beräkna ytintegralen $\iint_S z\,dS$, där S är halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

8. (a) Bevisa att gradienten är normalvektor till nivåkurvan. (4 p)

(b) Härled formeln för ytelementet för en graf $z = f(x, y)$ parametriserad med x, y. (4 poäng)

`/stig`

MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2010–01–12, f J. Svar.

1.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (2x+3y)\,dy\,dx = \frac{5}{6}.$$

2. Inga singulära punkter, inga randpunkter. Kritiska punkter ges av

$$f'(x,y)^T = \begin{bmatrix} 3x^2+3y^2-15 \\ 6xy-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De kritiska punkterna är $(1,2)$, $(2,1)$, $(-1,-2)$ och $(-2,-1)$. Hesse-matrisen är

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}$$

Vi beräknar egenvärdena till Hesse-matrisen i de fyra kritiska punkterna. Vi finner

$$\begin{array}{ll} (1,2) & \text{sadelpunkt} \\ (2,1) & \text{minimipunkt} \\ (-1,-2) & \text{sadelpunkt} \\ (-2,-1) & \text{maximipunkt} \end{array}$$

3. Man gör först en konturplot av funktionen f för att få en uppfattning om var extrempunkterna ligger.

Man skriver sedan en funktionsfil `gradf.m` för gradienten:

```
function  y=gradf(x)
  y(1)=  3*x(1)^2+3*x(2)^2-15;
  y(2)=  6*x(1)*x(2)-12;
```

Sedan kör man

```
>> x0=[1;2];
>> x=newton(@gradf,x0,1e-6)
```

För att bestämma punktens karaktär beräknar vi Hesse-matrisen i punkten `x` (Hesse-matrisen är ju Jacobi-matrisen av gradienten):

```
>> H=jacobi(@gradf, x)
```

och sedan egenvärdena

```
>> lambda=eig(H)
```

4. Kurvan på parameterform:

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= t^2/3, \qquad\qquad 0 \le t \le 3. \\ z &= 2xy/9 = 2t^3/27, \end{aligned}$$

Vi får

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1, \\ \dot{y} &= 2t/3, \qquad ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt = (1+2t^2/9)\,dt \\ \dot{z} &= 2t^2/9, \end{aligned}$$

och

$$\int_C \frac{y}{x}\,ds = \int_0^3 \frac{t^2}{3t}(1+2t^2/9)\,dt = \int_0^3 (t/3+2t^3/27)\,dt = 3.$$

5.

$$\nabla f(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - 3\mathbf{j}$$

$$f'_{\mathbf{v}}(-1,1,2) = \nabla f(-1,1,2)\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (-2,1,-3)\cdot(1,-2,2)/3 = -\frac{10}{3}$$

Maximala riktingsderivatan fås i riktningen $\nabla f(-1,1,2) = (-2,1,-3)$ och $|\nabla f| = |(-2,1,-3)| = \sqrt{14}$.

6.

$$V = \iint_D z\,dS = \iint_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

där D är cirkelskivan $x^2+y^2\le 1$. Med polära koordinater fås

$$V = \int_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr\,d\phi = \frac{\pi}{2}$$

7. Ytan är en graf:

$$z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}, \quad D: x^2+y^2\le R^2.$$

Vi har

$$z'_x = -x/\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \quad z'_y = -y/\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Ytelementet blir

$$dS = \sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dx\,dy = \frac{R}{z}\,dx\,dy$$

och integralen

$$\iint_S z\,dS = \iint_D R\,dx\,dy = R\pi R^2 = \pi R^3.$$

8. (a) Se boken.
(b) Värmeflödet genom randen är proportionellt mot temperaturdifferensen, plus eventuellt bidrag från värmekällor på randen. Värmeflödestätheten **ut** genom randen blir då

$$\mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{N}} = k(u-u_{\mathrm{A}}) - g \quad \text{på } S,$$

där u är temperaturen på insidan av randytan, u_{A} är omgivningens temperatur ("ambient temperature"), k är värmeöverföringskoefficienten för det isolerande ytskiktet, och g är tätheten för ett föreskrivet **in**flöde. Enligt Fouriers lag har vi

$$\mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{N}} = -a\nabla u\cdot\hat{\mathbf{N}} = -a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u \quad \text{på } S,$$

där a är värmeledningskoefficienten och $\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u = \hat{\mathbf{N}}\cdot\nabla u$ betecknar normalderivatan av u, dvs riktningsderivatan i normalriktningen $\hat{\mathbf{N}}$. Därför blir randvillkoret

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u-u_{\mathrm{A}}) = g \quad \text{på } S. \qquad \text{(Robins randvillkor)}$$

För teknologer inskrivna 2006 och tidigare.

1. Som ovan.

2. Som ovan.

3.

$$P_2(x, y) = 3 + 2x - 2x^2 - 4x(y - 1) - (y - 1)^2$$

4. Som ovan.

5. Som ovan.

6. Som ovan

7. Som ovan.

8. Se boken.

`/stig`