Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2013–08–31, f V

Telefon: Anders Martinsson 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng.

(a) Beräkna riktningsderivatan av $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4z$ i punkten $(2,-1,1)$ i riktningen $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

(b) Bestäm linjäriseringen av $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4z$ kring punkten $(2,-1,1)$.

(c) Bestäm tangentlinjen till kurvan $C\colon \mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ i punkten $(4,4,8)$. Tangentlinjen ska anges på parameterform.

(d) Skissa och beskriv med ord ytan S i uppgift 4.

2. Beräkna massan av en tråd som är formad som en kvartscirkel $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, och vars masstäthet ges av $\rho = \lambda(x+y)/R$. Här är R och λ konstanter med enheterna `m` respektive `kg/m` och x, y har enheten `m`.

3. Visa att en rektangulär låda med fix volym och minimal yta är en kub. Tips: antag att sidorna är x, y, z, ställ upp formler för volymen V och arean A, minimera A med $V =$ konstant.

4. Beräkna integralen $\iint_S (x+z)\,\mathrm{d}S$, där ytan S parametriseras av

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= 3\cos(v) \qquad 0 \leq u \leq 4,\ 0 \leq v \leq \pi/2. \\ z &= 3\sin(v) \end{aligned}$$

5. Beräkna utflödet av vektorfältet $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k}$ genom ytan S som begränsas av $z = 1 - x^2 - y^2$ och $z = 0$.

6. (a) Genomför ett steg av Newtons metod för ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 y = 8 \\ x y^2 = 8 \end{cases}$$

(b) Skriv ned hur man gör detta i Matlab med programmet `newton.m` som vi skrev i datorövning 2. Du ska inte skriva ned programmet `newton.m` utan de m-filer och kommandorader som behövs.

7. Skriv ned randvärdesproblemet för värmeledning i kvadraten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, med värmeledningskoefficienten 3, källtätheten 2 och omgivande temperaturen 10 på alla sidor. På sidan $y = 0$ har vi värmeöverföringskoefficienten 7 medan övriga sidor har oändligt stor värmeöverföringskoefficient. Inga värmekällor på randen.

8. Härled den svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) = f \quad \text{i } D, \\ a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g \quad \text{på } S. \end{cases}$$

`/stig`

blank sida

MVE255/TMV191 2013-08-31

1(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4z$, $f(2,-1,1) = 4+1-4 = 1$

$\nabla f(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\nabla f(2,-1,1) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

$\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{3}$, $D_{\mathbf{u}} f(2,-1,1) = (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot \dfrac{(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$

(b) $L(x,y,z) = f(2,-1,1) + f'(2,-1,1)\begin{bmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z-1 \end{bmatrix} =$

$= 1 + [4, -2, -4]\begin{bmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z-1 \end{bmatrix} = 1 + 4(x-2) - 2(y+1) - 4(z-1)$

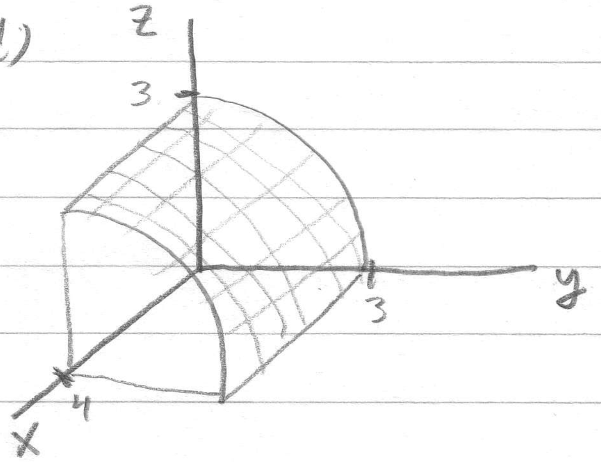
(c) $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

$\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(2) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

Tangentlinjen: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 8 + 12t \end{cases}$$

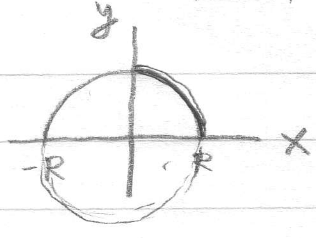
(d)



Den del av cylindern $y^2 + z^2 = 9$ som ligger i första oktanten och mellan $x = 0$ och $x = 4$.

130831 | 2

2. $\mathbf{r} = R\cos(t)\,\mathbf{i} + R\sin(t)\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi/2$



$\mathbf{r}'(t) = -R\sin(t)\,\mathbf{i} + R\cos(t)\,\mathbf{j}$

$|\mathbf{r}'(t)| = R, \quad ds = R\,dt$

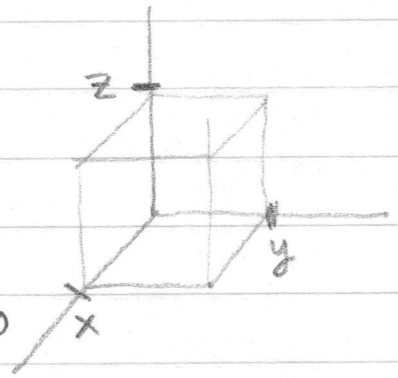
Massan $\displaystyle m = \int_C \rho\, ds = \int_C \lambda \frac{(x+y)}{R}\, ds =$

$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda \frac{R\cos(t) + R\sin(t)}{R} R\,dt$

$\displaystyle = \lambda R \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t) + \sin(t))\, dt = \lambda R \Big[\sin(t) - \cos(t)\Big]_0^{\pi/2}$

$= 2\lambda R$

3. Volymen $V = xyz \Rightarrow z = \dfrac{V}{xy}$



Arean $A = 2xy + 2xz + 2yz =$

$\displaystyle = 2\left(xy + x\frac{V}{xy} + y\frac{V}{xy}\right)$

$\displaystyle = 2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right), \quad x, y, z > 0$

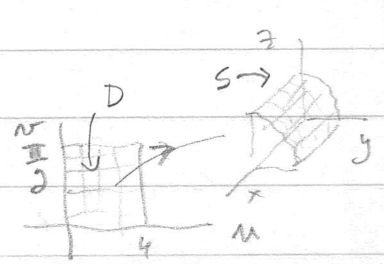
Minimera A. Kritiska punkter ges av

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x} = 2\left(y - \dfrac{V}{x^2}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial A}{\partial y} = 2\left(x - \dfrac{V}{y^2}\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 y = V \\ x y^2 = V \end{cases} \qquad x = y = V^{1/3}$$

Sedan fås $z = \dfrac{V}{xy} = V^{1/3}$.

Alltså: $x = y = z$, en kub.

4. $\mathbf{r} = u\,\mathbf{i} + 3\cos(v)\,\mathbf{j} + 3\sin(v)\,\mathbf{k}, \quad u \in [0,4], \quad v \in [0, \frac{\pi}{2}]$



Tangenter: $\begin{cases} \mathbf{r}'_u = \mathbf{i} \\ \mathbf{r}'_v = -3\sin(v)\,\mathbf{j} + 3\cos(v)\,\mathbf{k} \end{cases}$

En normalvektor: $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3\sin(v) & 3\cos(v) \end{vmatrix} = -3\cos(v)\,\mathbf{j} - 3\sin(v)\,\mathbf{k}$

$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = 3$

Ytelementet: $dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\, du\, dv = 3\, du\, dv = 3\, dA$

Integralen: $\iint_S (x+z)\, dS = \iint_D (u + 3\sin(v))\, 3\, dA =$

$$= 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^4 (u + 3\sin(v))\, du\, dv$$

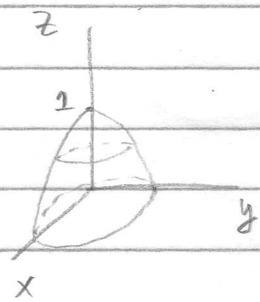
$$= 3 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{u^2}{2} + 3u\sin(v) \right]_0^4 dv$$

$$= 3 \int_0^{\pi/2} (8 + 12\sin(v))\, dv$$

$$= 3 \left[8v - 12\cos(v) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 3(4\pi + 12) = 12\pi + 36$$

5. Vi använder divergenssatsen.

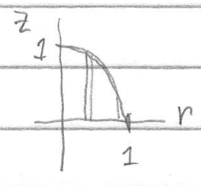


$$\mathbf{F} = xz\,\mathbf{i} + zy\,\mathbf{j} + 2z^2\,\mathbf{k}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = z + z + 4z = 6z$$

Utflödet: $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV =$

$$= \iiint_V 6z\, dV = \left\{ \begin{array}{l} \text{cylinderkoord} \\ 0 \le z \le 1 - r^2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right.$$



$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} 6z\, dz\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{6z^2}{2} \right]_0^{1-r^2} r\, dr$$

$$= 6\pi \int_0^1 (1-r^2)^2\, r\, dr = \left\{ \begin{array}{l} s = 1 - r^2 \\ ds = -2r\, dr \end{array} \right\} = 3\pi \int_0^1 s^2\, ds = \pi$$

Alternativt (utan divergenssatsen).

Bottenytan S_1: $z=0$, $\hat{N} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{F}\cdot\hat{N} = 0\cdot(-\mathbf{k}) = 0$

Utflödet: $\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{N}\,dS = 0$

Sidoytan S_2: $z = 1-x^2-y^2$, $x^2+y^2 \le 1$, graf.

$$\hat{N} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$$

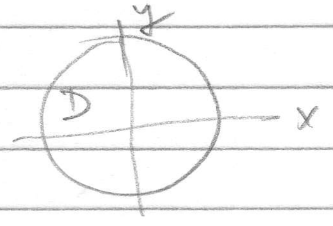
$$dS = |\mathbf{N}|\,dA = |\mathbf{N}|\,dx\,dy, \quad \hat{N}\,dS = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}|\mathbf{N}|\,dA$$

Utflödet: $$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_D (xz\mathbf{i}+zy\mathbf{j}+2z^2\mathbf{k})\cdot(2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dA$$

$$= \iint_D \left(2(x^2+y^2)z + 2z^2\right) dA$$

$$= 2\iint_D \left((x^2+y^2)(1-x^2-y^2) + (1-x^2-y^2)^2\right) dA$$

$= \{$ polära



$\}$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2(1-r^2) + (1-r^2)^2\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \{ s = 1-r^2 \} = 2\pi \int_0^1 \left((1-s)s + s^2\right) ds$$

$$= 2\pi \int_0^1 s\,ds = \pi.$$

Totala utflödet: $$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{N}\,dS + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{N}\,dS = 0+\pi$$

6. $f(x,y) = \begin{bmatrix} x^2y - 8 \\ xy^2 - 8 \end{bmatrix}$ (en exakt lösn: (2,2))

$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}$

Välj start-gissning: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Residualen: $b = -f(1,1) = -\begin{bmatrix} -7 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$

Jacobimatrisen $A = f'(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Linjäriserade systemet:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

Uppdatera: $x = x + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/3 \\ 7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 10/3 \end{bmatrix}$

7. $$\begin{cases} -\nabla\cdot(3\nabla u) = 2 & \text{för } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 10 \\ -3\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y} + 7\big(u(x,0) - 10\big) = 0 \end{cases}$$

8. Se FEM2.

/Stig