Matematik Chalmers

Tentamen MVE255 Matematisk analys i flera variabler, 2016–05–31 e SB

Telefon: Stig Larsson 772 3543
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1, totalt 20 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret.

Uppgift 2–4 är värda 10 poäng vardera, totalt 30. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng, totalt 20.

1.1. Ge ett exempel som man kan använda för att testa MATLAB-funktionen `jacobi.m` från datorövningarna. Dvs ange vad man skriver på kommandoraden och vilket svar man bör få.

1.2. Beskriv vad följande Matlab-kommandon gör. Skissa figuren som skapas.

```
>> x=linspace(0,1); y=x;
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=5-X.^2-Y.^2;
>> surf(X,Y,Z)
```

1.3. Vad blir `x` efter följande Matlab-kommandon med `newton.m` från datorövningarna?

```
>> x=[1;2]; x=newton(@(x) [x(1)*x(2)-1; x(1)-x(2)], x, 1e-6);
```

1.4. Fyll i värden i filen `BdryData.m`:

```
if tag==1  k=...;  uA=...;   g=...; end
if tag==2  k=...;  uA=...;   g=...; end
```

som anger randvillkoren $u(0) = 1$, $a(1)u'(1) + 2(u(1) - 3) = 4$.

1.5. PDE Toolbox har dessa beteckningar för randvärdesproblem av typen "Generic scalar problem":

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n \cdot (c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases}$$

Vad ska man fylla i för värden för ett värmeledningsproblem med inre värmekälla $= 8$ `J/(m`^{3} `s)`, värmeledningskoefficient $= 5$ `[J/(m K s)]`, hela randen oisolerad med yttre temperaturen $= 7$ `K`.

1.6. Härled partialintegrationsformeln

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi \, \mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi \, \mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi \, \mathrm{d}V$$

1.7. Beräkna integralen $\iiint_D z \, \mathrm{d}V$ där området D är den del av prismat $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y \leq 1$ som ligger inuti klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

1.8. Beräkna integralen $\iint_S (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}S$ med ytan $S\colon z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, $y \leq x$, $x \leq 0$.

1.9. Beräkna flödet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S$ uppåt med $\mathbf{F} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ och samma yta som i förra uppgiften.

1.10. Bestäm en parametrisering för tangentlinjen till kurvan $\mathbf{r} = (1 + t^2)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ i punkten $(5, -8, -4)$.

Vänd!

2. En vägg i form av en platta med tjocklek L har en värmeledningskoefficient som varierar periodiskt enligt $a(x) = a_0/(1+\epsilon\cos(2\pi x/L))$ för $x \in [0, L]$. Här är a_0 `[J/(m K s)]` given och $\epsilon \in [0, 1]$ en parameter. Obs att $\epsilon \in [0, 1]$ garanterar att $0 \leq a < \infty$. Omgivningens temperatur är u_0 respektive u_L och det finns inga värmekällor inuti eller på randen och ingen isolering på randen. (a) Bestäm temperaturen $u(x)$ och värmeflödestätheten $j(x) = -a(x)\,Du(x)$. (b) Visa att värmeflödestätheten är proportionell mot temperaturskillnaden, dvs bestäm en värmeöverföringskoefficient K så att värmeflödestätheten kan skrivas $j = K\,(u_0 - u_L)$. Vilken dimension (SI-enhet) har denna koefficient? (c) Bestäm ϵ så att K blir minimal.

3. Vi vill bestämma max och min för funktionen $xy\sqrt{z}$ då x, y, z är ickenegativa tal med $x+y+z = 1$. (a) Ställ upp Lagranges multiplikatormetod för detta problem. (b) Lös ekvationssystemet för hand. (c) Beskriv hur man gör detta i Matlab med våra program `jacobi.m` och `newton.m`.

4. Härled värmeledningsekvationen: $-\nabla \cdot (a\nabla u) = f$ i D.

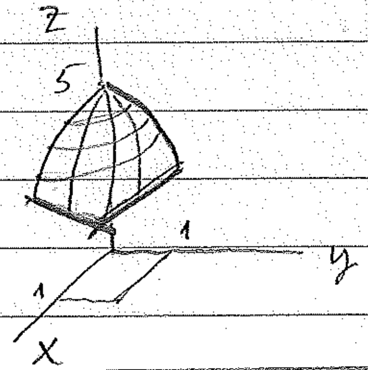
`/stig`

MVE255 2016-05-31

1.1 >> Df = jacobi(@(X) X(1)*X(2)*X(3), [1;2;3])

bör ge $Df = [6\ 3\ 2]$.

1.2 Man plottar grafen $z = 5 - x^2 - y^2$, $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$



1.3 Lös ekv. systemet $\begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = \pm 1$

så att vi får $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ eller $x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Förmodligen den första för den är närmast startpunkten.

1.4 if tag == 1 k = 1e8; uA = 1; g = 0; end
if tag == 2 k = 2; uA = 3; g = 4; end

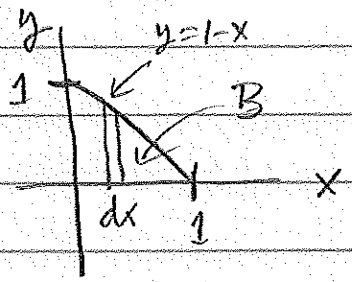
1.5 $c = 5$, $a = 0$, $f = 8$, välj Dirichlet och $h = 1$, $r = 7$.

1.6 Gauss sats och produktderivering:

$$\iint_S \hat{N} \cdot (\phi \mathbb{F})\, dS = \iiint_D \nabla \cdot (\phi \mathbb{F})\, dV = \iiint_D (\nabla\phi \cdot \mathbb{F} + \phi \nabla \cdot \mathbb{F})\, dV$$

$$\Rightarrow \iiint_D \phi\, \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \iint_S \phi\, \hat{N} \cdot \mathbb{F}\, dS - \iiint_D \nabla\phi \cdot \mathbb{F}\, dV$$

1.7 Området är enkelt i z, dvs mellan två grafer $z=0$ och $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ för $(x,y)\in B$ med $B=\{(x,y): x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$



$$\iiint_D z\,dV = \iint_B \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz \right) dx\,dy =$$

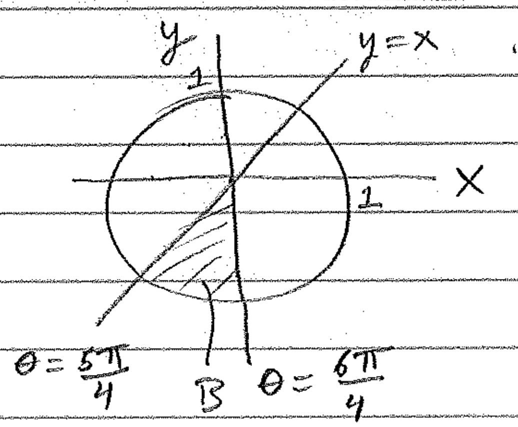
$$= \iint_B \frac{1}{2}(4-x^2-y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (4-x^2-y^2)\,dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left((4-x^2)(1-x) - \frac{1}{3}(1-x)^3 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(4-x^2-4x+x^3-\frac{1}{3}(1-3x+3x^2-x^3) \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{11}{3} - 3x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 \right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{3} - \frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{12}$$

1.8 Ytan är en graf:



$$z = 1-x^2-y^2, \quad (x,y)\in B$$

Parametrisering:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1-u^2-v^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (1,0,-2u), \quad \frac{\partial r}{\partial v} = (0,1,-2v)$$

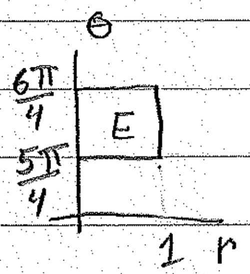
$$N = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (2u, 2v, 1), \quad |N| = \sqrt{4u^2+4v^2+1}$$

$$dS = \sqrt{4(u^2+v^2)+1}\,du\,dv$$

Integralen blir

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dS = \iint_B (u^2+v^2)\sqrt{4(u^2+v^2)+1}\,du\,dv =$$

$$= \{\text{polära}\} = \iint_E r^2\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta =$$



$$= \int_{5\pi/4}^{6\pi/4} d\theta \int_0^1 r^2\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr =$$

$$= \left\{\begin{matrix} s = 4r^2+1 \\ ds = 8r\,dr \end{matrix}\right\} = \frac{\pi}{4}\int_1^5 \frac{s-1}{4}\sqrt{s}\cdot\frac{1}{8}\,ds =$$

$$= \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{32}\left[\frac{2}{5}s^{5/2} - \frac{2}{3}s^{3/2}\right]_1^5 = \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{32}\left(\frac{20}{3}\sqrt{5} + \frac{4}{15}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{120}\left(25\sqrt{5}+1\right)$$

1.9 $$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_B (u, v, 1-u^2-v^2)\cdot(2u, 2v, 1)\,du\,dv$$

$$= \iint_B \left(2u^2+2v^2+1-u^2-v^2\right)du\,dv = \iint_B (u^2+v^2+1)\,du\,dv$$

$$= \{\text{polära}\} = \iint_E (r^2+1)\,r\,dr\,d\theta = \int_{5\pi/4}^{6\pi/4} d\theta \int_0^1 (r^3+r)\,dr$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{16}$$

1.10 $\mathbf{r}(t) = (1+t^2)\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{r}(-2) = (5, -8, -4)$

$\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{r}'(-2) = -4\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$

Tangentlinjen: $\mathbf{r}(t) = (5, -8, -4) + t(-4, 12, 2)$

2) $-D\left(\frac{a_0}{1+\varepsilon\cos(2\pi x/L)}Du(x)\right)=0$

$$-\frac{a_0}{1+\varepsilon\cos(2\pi x/L)}Du(x)=c_1$$

$$Du(x)=-\frac{c_1}{a_0}\left(1+\varepsilon\cos\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$u(x)=-\frac{c_1}{a_0}\left(x+\varepsilon\frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{L}\right)+c_2$$

Randvillkoren ger:

$$\begin{cases} u_0=u(0)=c_2 \\ u_L=u(L)=-\frac{c_1}{a_0}(L+0)+c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad c_1=\frac{a_0}{L}(u_0-u_L),\quad c_2=u_0$$

$$u(x)=(u_L-u_0)\left(\frac{x}{L}+\frac{\varepsilon}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{L}\right)+u_0$$

$$j(x)=-a(x)Du(x)=c_1=\frac{a_0}{L}(u_0-u_L)$$

Alltså blir värmeflödestätheten konstant: $j=K(u_0-u_L)$ med koefficienten $K=\frac{a_0}{L}\left[\frac{J}{m^2Ks}\right]$.

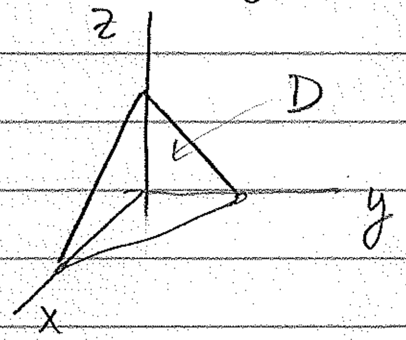
Eftersom K inte beror på ε så finns det inget optimalt värde på ε.

3) $f(x,y,z) = xy\sqrt{z}$ skall optimeras för

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ och $x+y+z=1$, dvs över

den del D av planet $x+y+z=1$ som ligger

i första oktanten.



Det är klart att

$f(x,y,z) = xy\sqrt{z} \geq 0$ i D och $f(x,y,z) = 0$

på randen av D för där är minst

en av x, y, z lika med 0.

Alltså är $\min\limits_{D} f(x,y,z) = 0$

Lagrange-funktionen bildas:

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

$$= xy\sqrt{z} + \lambda(x+y+z-1)$$

Kritisk punkt ges av $L'(x,y,z,\lambda) = 0$:

$$\begin{cases} L'_x = y\sqrt{z} + \lambda = 0 \\ L'_y = x\sqrt{z} + \lambda = 0 \\ L'_z = xy/2\sqrt{z} + \lambda = 0 \\ L'_\lambda = x+y+z-1 = 0 \end{cases}$$

Eliminera λ:

$$-\lambda = y\sqrt{z} = x\sqrt{z} = \frac{xy}{2\sqrt{z}}$$

Vi kan antaga att $x>0, y>0, z>0$,

annars blir $f(x,y,z)=0$.

Vi har $y\sqrt{z} = x\sqrt{z} \Rightarrow y = x$

Sätt in $y=x$ i ekv.: $x\sqrt{z} = \frac{xy}{2\sqrt{z}} \Rightarrow z = \frac{1}{2}x$.

Sätt in i bivillkoret $x+y+z=1$:

$$x + x + \frac{1}{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

Alltså: $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ och $f\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{25}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{125}$

är maximum.

I Matlab:

```
f  = @(x)( x(1)*x(2)*sqrt(x(3)) );
g  = @(x)( x(1)+x(2)+x(3)-1 );
L  = @(x)( f(x(1:3))+x(4)*g(x(1:3)) );
DL = @(x) jacobi(L,x)';
x0=[1;1;1;1];
x = newton(DL,x0,1e-6);
y = f(x(1:3))
```

---

4) Se FEM2 sid 2-3.