Matematik Chalmers

Tentamen MVE255 Matematisk analys i flera variabler, 2016–08–26 f SB

Telefon: Adam Malik 772 5325
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1, totalt 10 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret. Uppgift 2–5 är värda 5 poäng vardera, totalt 20, bedöms på om lösningarna är korrekta. Uppgift 6–7 är värda 10 poäng vardera. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng, totalt 10.

1.1. Skriv den undre halvsfären (radie a, centrum i origo) som en graf $z = f(x, y)$. Ange definitionsmängden för f.

1.2. Visa hur man beräknar derivatan av funktionen $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ i punkten $(1, 2, 3)$ med Matlab-programmet `jacobi.m` från datorövningarna. Ange vad man skriver på kommandoraden och vilket svar man bör få.

1.3. Genomför ett steg av Newtons metod för att lösa ekvationssystemet

$$xy = 1; \quad x = y.$$

1.4. Skriv ned den linjära approximationen av funktionen $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ kring punkten $(1, 2, 3)$.

1.5. PDE Toolbox har dessa beteckningar för randvärdesproblem av typen "Generic scalar problem":

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n \cdot (c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases}$$

Vad ska man fylla i för värden på c, a, f, q, g, h, r för ett värmeledningsproblem med inre värmekälla $= 9$ `J/(m^3 s)`, värmeledningskoefficient $= 8$ `[J/(m K s)]` i området D. En del av randen är perfekt isolerad och resten av randen har ingen isolering alls. Inga värmekällor på randen, yttre temperatur $= 7$ `K`.

2. (5 poäng) Härled ytelementet dS för en graf $z = f(x, y)$.

3. (5 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{v} = (3x^2 + y^3)\mathbf{i} + 4xz\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ ut genom sfären med centrum i origo och radie a.

4. (5 poäng) Beräkna integralen $\int_C f \, ds$ med $f(x, y) = (2x + 6)/y$ längs parabeln $C\colon x - y^2 + 3 = 0$ från $(-2, -1)$ till $(1, 2)$.

5. (5 poäng) Beräkna volymen mellan graferna $z = x^2 + y^2$ och $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Vänd!

6. (10 poäng) En vägg i form av en platta med tjocklek L har en värmeledningskoefficient som varierar enligt $a(x) = a_0/(1+\epsilon\frac{x}{L})$ för $x \in [0, L]$. Här är a_0 [J/(m K s)] given och $\epsilon \geq 0$ en parameter. Omgivningens temperatur är u_0 respektive u_L och det finns inga värmekällor inuti eller på randen och ingen isolering på randen. (a) Bestäm temperaturen $u(x)$ och värmeflödestätheten $j(x) = -a(x)\,Du(x)$. (b) Visa att värmeflödestätheten är proportionell mot temperaturskillnaden, dvs bestäm en värmeöverföringskoefficient K så att värmeflödestätheten kan skrivas $j = K\,(u_0 - u_L)$. Vilken dimension (SI-enhet) har denna koefficient? (c) Bestäm ϵ så att K blir maximal.

7. (10 poäng) Vi ska bestämma vilka punkter på ytan $z^2 = xy + 4$ som ligger närmast origo. (Tips: minimera kvadraten på avståndet.)

(a) Ställ upp Lagranges multiplikatormetod för detta problem. (b) Lös ekvationssystemet för hand. (c) Beskriv hur man gör detta i Matlab med våra program `jacobi.m` och `newton.m`.

/stig

MVE255 2016-08-26 lösningar.

1.1 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

1.2
```
>> f = @(x)([x(1)*x(2); x(3)]); x = [1;2;3];
>> Df = jacobi(f, x)
>> Df = [2 1 0; 0 0 1]
```
(vad man bör få)

1.3 $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - 1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$

$Df(x) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Välj $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (inte given måste väljas)

$b = -f(x_0) = -\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$A = Df(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$Ah = b$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.4 $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2 + 2(x_1 - 1) + x_2 - 2 \\ 3 + x_3 - 3 \end{bmatrix}$

1.5 $c = 8$, $a = 0$, $f = 9$ i D

$q = 0$, $g = 0$ på S_2

$h = 1$, $r = 7$ på S_1

2. $z = f(x,y)$ Parametrisera $u = x$, $v = y$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases} \qquad \text{Tangenter: } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + f_1'(u,v)\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} + f_2'(u,v)\mathbf{k}$$

Normalvektor: $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -f_1'(u,v)\mathbf{i} - f_2'(u,v)\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv = \sqrt{1 + f_1'(u,v)^2 + f_2'(u,v)^2}\, du\,dv$$

---

3. Vi använder divergenssatsen: $\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{v}\, dV$

$$\mathbf{v} = (3x^2 + y^3)\mathbf{i} + 4xz\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 6x + 3z^2$$

Sfäriska koordinater: $\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_B (6x + 3z^2)\, dx\,dy\,dz \underset{\uparrow}{=} 3 \iiint_B z^2\, dx\,dy\,dz =$$

$\iiint_B x\, dx\,dy\,dz = 0$ symmetri

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} (\rho\cos\phi)^2 \rho^2\, d\rho \sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= 3 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^{a} \rho^4\, d\rho}_{\frac{a^5}{5}} \int_0^{\pi} \cos^2\phi \sin\phi\, d\phi = \frac{6\pi}{5} a^5 \int_0^{\pi} \cos^2\phi \sin\phi\, d\phi$$

$$= \left\{ \begin{matrix} s = \cos\phi \\ ds = -\sin\phi\, d\phi \end{matrix} \right\} = \frac{6\pi}{5} a^5 \underbrace{\int_{-1}^{1} s^2 (-ds)}_{= \frac{2}{3}} = \frac{4\pi}{5} a^5$$

(3

4. $f(x,y) = \dfrac{2x+6}{y}$, $C:\ x - y^2 + 3 = 0$, $P_0 = (-2,-1)$, $P_1 = (1,2)$

Parametrisera: $t = y$

$$\begin{cases} x = t^2 - 3 \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [-1, 2]$$

Tangent: $\mathbb{r}'(t) = 2t\,\mathbb{i} + \mathbb{j}$, $ds = |\mathbb{r}'(t)|\,dt = \sqrt{4t^2+1}\,dt$

$$\int_C f\,ds = \int_{-1}^{2} f(t^2-3,t)\sqrt{4t^2+1}\,dt = \int_{-1}^{2} \frac{2(t^2-3)+6}{t}\sqrt{4t^2+1}\,dt$$

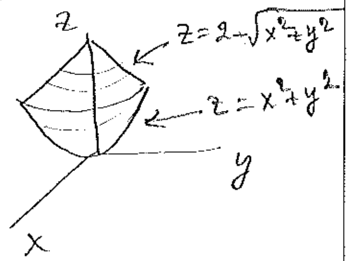
$$= \int_{-1}^{2} 2t\sqrt{4t^2+1}\,dt = \left\{ \begin{array}{l} u = 4t^2+1 \\ du = 8t\,dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int_5^{17} \frac{1}{4}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_5^{17} = \frac{1}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right).$$

---

5. $z = x^2 + y^2$

$z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$



Graferna skär varandra då

$$x^2 + y^2 = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$$

$$r^2 = 2 - r, \quad r^2 + r - 2 = 0, \quad r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

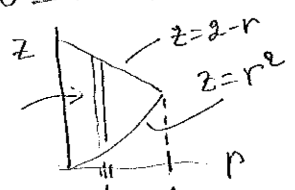
Alltså: $r_{max} = 1$.

Cylindriska koordinater:

$$A: \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ r^2 \le z \le 2-r \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

$$V = \iiint_D dV = \iiint_A r\,dr\,d\theta\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\iint_K r\,dr\,dz\right)d\theta = 2\pi \iint_K r\,dr\,dz =$$



$$= 2\pi \int_0^1 r\left(\int_{r^2}^{2-r} dz\right)dr = 2\pi \int_0^1 r(2-r-r^2)\,dr$$

$$= 2\pi\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{6}\pi$$

6. $$-D\left(\frac{a_0}{1+\varepsilon x/L}Du(x)\right)=0$$

Integrera: $$-\frac{a_0}{1+\varepsilon x/L}Du(x)=c_1$$

$$Du(x)=-\frac{c_1}{a_0}\left(1+\varepsilon\frac{x}{L}\right)$$

Integrera: $$u(x)=-\frac{c_1}{a_0}\left(x+\varepsilon\frac{x^2}{2L}\right)+c_2$$

(Obs: $j(x)=-aDu(x)=c_1$.)

Randvillkor:

$$\begin{cases} u_0=u(0)=c_2 \\ u_L=u(L)=-\frac{c_1}{a_0}\left(L+\frac{\varepsilon L}{2}\right)+c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ c_2=u_0,\quad u_0-u_L=\frac{c_1}{a_0}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)L$$

$$\Rightarrow\ c_1=\frac{a_0}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)L}(u_0-u_L)$$

Alltså: $$u(x)=\frac{\frac{x}{L}+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2}{1+\frac{\varepsilon}{2}}(u_L-u_0)+u_0$$

$$j(x)=\frac{a_0}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)L}(u_0-u_L)$$

Vi ser att $K=\frac{a_0}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)L}\quad\left[\frac{J}{m^2Ks}\right]$

blir maximal då $\varepsilon=0$.

7. Minimera $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ (5

under bivillkoret $g(x,y,z) = z^2 - xy - 4 = 0$.

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-4)$$

Extrempunkter ges av:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y,z,\lambda) = 2x - \lambda y = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y,z,\lambda) = 2y - \lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_z(x,y,z,\lambda) = 2z - 2\lambda z = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x,y,z,\lambda) = z^2 - xy - 4 = 0 \end{cases}$$

Lösning: $\begin{cases} 2x = \lambda y & (1) \\ 2y = \lambda x & (2) \\ z(1+\lambda) = 0 & (3) \\ z^2 = xy+4 & (4) \end{cases}$

(1)-(2): $\begin{cases} -\lambda x + 2y = 0 \\ 2x - \lambda y = 0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4$

$\lambda^2 \neq 4 \Rightarrow x = y = 0$, $\lambda = 2 \Rightarrow x = y$, $\lambda = -2 \Rightarrow x = -y$

(3) ger $z = 0$ eller $\lambda = -1$

$\underline{\underline{z=0}}$ i (4) ger $xy = -4$, enda möjligheten $\begin{cases} \lambda = -2 \\ x = -y = \pm 2 \end{cases}$

Vi får $f(\pm 2, \mp 2, 0) = 8$.

$\underline{\underline{\lambda = -1}}$ ger $x = y = 0$ och med (4): $z^2 = 4$, $z = \pm 2$.

Vi får $f(0,0,\pm 2) = 4$. Detta är minimum.

/Stig